Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР ЖӘНЕ ОНЫҢ САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ

Дәрістік сабақ жоспары:

1. Негізгі ұғымдар;
2. Теориялық сұрақтар.

14.1 Негізгі ұғымдар

Кездейсоқ шама деп тек сандық мәндер қабылдай алатын және алдын ала (сынақ жүргізілмей тұрып) мәні неге (нешеге) тең болатыны белгісіз айнымалы шаманы айтамыз, ***белгіленуі:*** *X, Y, Z,….*

14.1-мысал:

Топта 20 студент бар. X – тақтаға шақырылатын студенттердің тізімдегі нөмірі болсын.

Мүмкін мәндер жиыны:
1, 2, 3,… 20 – сандар;

Мүмкін мәндері әртүрлі, сондықтан X айнымалысы студент шақырылмай тұрып белгісіз болмақ. Демек, X – кездейсоқ шама.

Бақылау түрі:	
Дифференциалдық есеп	
Аты-жөні	орта балл
1. Абилкасимов Али Алимжанулы	0
2. Агжолтай Абилхасам	75,63
3. Аманбек Айдын	78,51
4. Бердиял Бекболат	0
5. Болат Жалел Маратұлы	73,79
6. Брән Елнұр Біржанұлы	2,5
7. Ермек Нұрай Бекболатқызы	0
8. Жұмағалиева Ақмарал	31,27
9. Жұмақан Бекжан Сәкенұлы	70,79
10. Қазиева Жанғаным Қайратқызы	75,65
11. Махмет Еркежан Сайранқызы	72,3
12. Монтоо Эсенбол	79,97
13. Нұржанова Гүлнұр Нұржанқызы	50,65
14. Орман Аружан Полатқызы	74,16
15. Орынбек Жанайдар Болатбекұлы	73,67
16. Рахат Жанибек	0
17. Сагатова Дильназ Қанатқызы	53,73
18. Сәбит Азамат Ерденұлы	77,85
19. Серикбаева Аружан Еркиновна	74,1
20. Тасеменов Әлібек Сәндібекұлы	51,33

14.2-мысал:

X – тақтаға шақырылатын студенттердің аты болсын.

X – бұл жағдайда айнымалы шама, бірақ мәндері сан емес (Али, Абилхасам, Айдын,…);

Демек, X – кездейсоқ шама емес.

Бақылау түрі:	
Дифференциалдық есеп	
Аты-жөні	орта балл
Абилкасимов Али Алимжанулы	0
Агжолтай Абилхасам	75,63
Аманбек Айдын	78,51
Бердиял Бекболат	0
Болат Жалел Маратұлы	73,79

14.3-мысал:

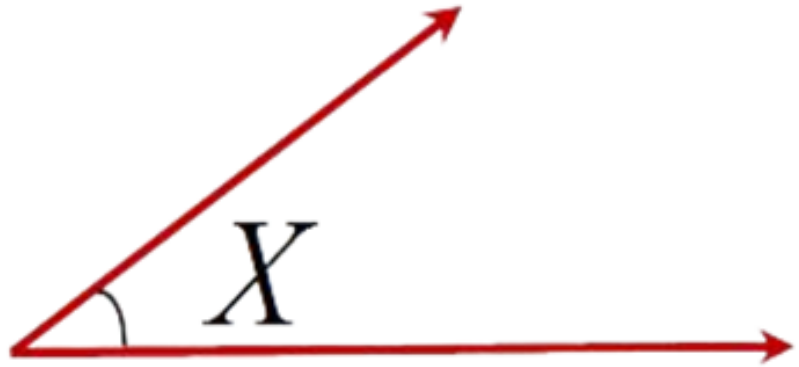
Ойын сүйегі 6 ұпай түскенше тасталынды.
X – сүйектің тасталыну саны болсын.
X – 1, 2, 3,... – сандар, X – айнымалы шама алдын ала неше болатыны белгісіз.
Демек, X – кездейсоқ шама.



- *Мысал 14.1-де айнымалы шаманың мәндер жиыны ақырлы;*
- *Мысал 14.3-те айнымалы шаманың мәндер жиыны ақырсыз.*

14.4-мысал:

X – сағат тілдерінің арасындағы бұрыштардың кішісі болсын.



Мүмкін мәндер жиыны: $[0, \pi]$ болсын.

Егер тілдер беттессе, онда

$$X = 0 .$$

Егер тілдер қарама-қарсы бағытталса, онда

$$X = \pi .$$

Алдын ала X неге тең болатыны белгісіз.

Бұл шаманың ерекшелігі: мүмкін мәндер жиыны – тұтас аралық болады.

Мәндер жиынының түріне қарай кездейсоқ шамалар екі түрге бөлінеді: *дискретті* және *үзіліссіз*.

14.1-анықтама.

$(\Omega, \wp(\Omega), P)$ ықтималдық кеңістігінде берілген *кездейсоқ шама* деп $X:\Omega\to R$ бейнелеуін айтамыз.

$X(\Omega)=\{X(\omega)\,|\,\omega\subset\Omega\}$ жиыны X *кездейсоқ шамасының мәндерінің жиыны* немесе *бейнелерінің кеңістігі* деп аталады.

Ω жиынының келесі ішкі жиындарын енгізейік:

$$(X=x)=\{\omega\,|\,\omega\in\Omega,\ X(\omega)=x\};$$

$$(X\le a)=\{\omega\,|\,\omega\in\Omega,\ X(\omega)\le a\};$$

$$(X>a)=\{\omega\,|\,\omega\in\Omega,\ X(\omega)>a\}=\overline{(X\le a)};$$

$$(X\in B)=\{\omega\,|\,\omega\in\Omega,\ X(\omega)\in B\}.$$

14.5-мысал:

X - екі ойын сүйегін лақтырғанда түскен сандар қосындысы болсын.

Онда

$$\Omega = \{1,\ldots,6\}^2$$

және

$$X(\Omega) = \{2,3,\ldots,12\}$$

болады.

$$(X=4)=\{(1,3),(2,2),(3,1)\},$$

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$(X\le 4)=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,1),(2,1),(2,2),(3,1)=(X=2)\cup(X=3)\cup(X=4).$$

14.1-тұжырым. X - $(\Omega, \wp(\Omega), P)$ ықтималдық кеңістігінде берілген кездейсоқ шама болсын. Егер $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$ болса, онда $(X = x_1), ..., (X = x_n)$ - үйлесімсіз оқиғалардың толық жүйесі болады.

Дәлелдеуі:

Кез келген $i \neq j$ үшін $(X = x_i) \cap (X = x_j) = \emptyset$, яғни $(X = x_1), ..., (X = x_n)$ - үйлесімсіз оқиғалар.

$\bigcup_i (X = x_n) = \Omega$, яғни $(X = x_1), ..., (X = x_n)$ - толық жүйе.

14.2-анықтама.

$(\Omega, \wp(\Omega), P)$ ықтималдық кеңістігінде берілген X *кездейсоқ шамасының заңы* немесе *таратылымы (үлестірімі)* деп

$$f_X(x_i) = P(X = x_i), x_i \in X(\Omega)$$

бейнелеуін (функциясын) айтамыз.

Ескерту.

1. X *кездейсоқ шамасы берілген* дейміз, егер оның барлық мәндерінің жиыны $X(\Omega)$ мен кез келген $x \in X(\Omega)$ үшін $P(X = x)$ ықтималдығы берілсе.
2. $\{(X = x) \mid x \in X(\Omega)\}$ - оқиғалардың толық жүйесі болғандықтан, ықтималдықтар

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$$

шартын қанағаттандырулары қажет.

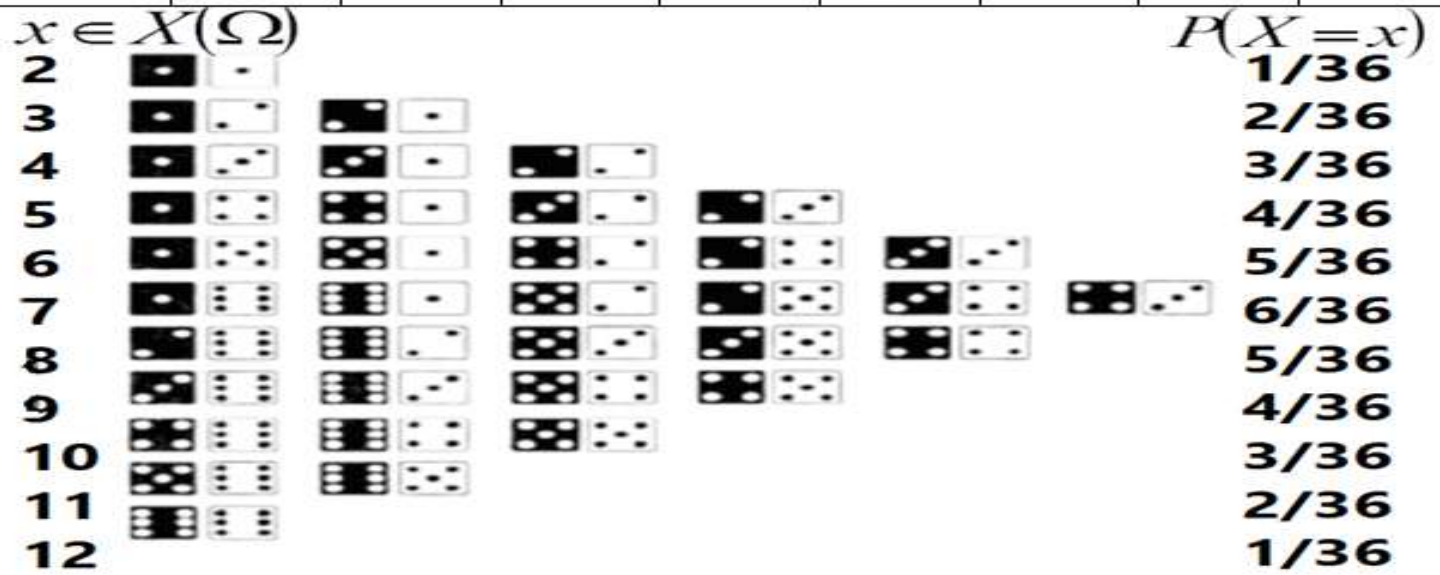
14.6-мысал:

X - екі ойын сүйегін лақтырғанда түскен сандар қосындысы болсын. X кездейсоқ шамасының тарату заңын құрыңыз.

Шешімі: X кездейсоқ шамасының мүмкін мәндерінің жиыны

$$X(\Omega)=\{2,3,\ldots,12\}$$

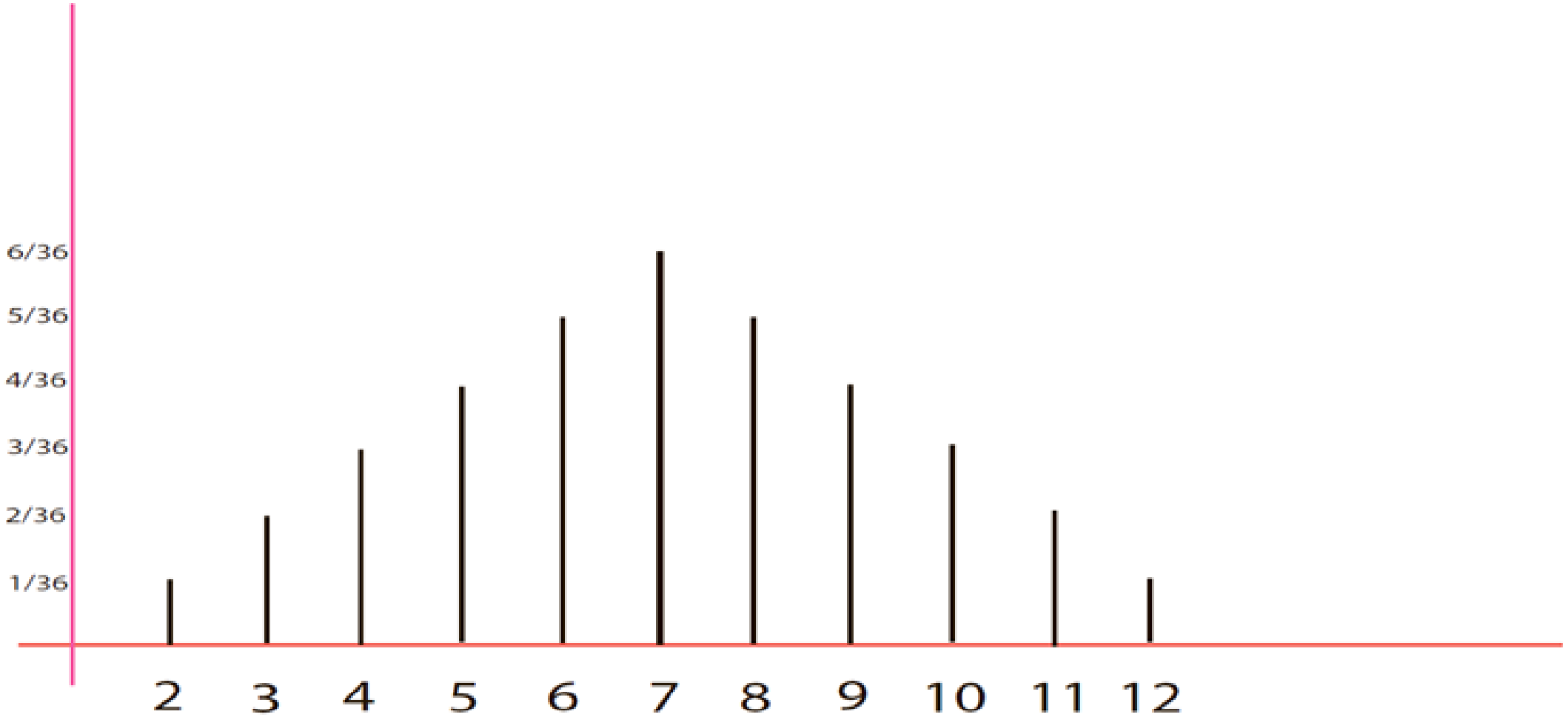
$x\in X(\Omega)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



$\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)=1$ қажетті шартының орындалуын тексерейік:

$$\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\ldots+\frac{1}{36}=1.$$

Осы заңның сызба түріндегі бейнелеуін келтірейік:



14.3-анықтама. $(\Omega, \wp(\Omega), P)$ ықтималдық кеңістігінде берілген X кездейсоқ шамасының *күтілетін мәні (математикалық күтімі)* немесе *орта мәні* деп деп

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

санын айтамыз.

14.7-мысал: Топтағы 25 студенттің үшеуі емтиханды екіге, жетеуі – үшке, тоғызы – төртке, алтауы – беске тапсырды.
Топ студентінің бағасының математикалық күтімін табыңыз.

Шешімі: X – топ студентінің бағасы болсын. Бізге $E(X)$ табу керек.

X кездейсоқ шамасының тарату заңын құрамыз.

X кездейсоқ шамасының мүмкін мәндерінің жиыны $X(\Omega)=\{2,3,4,5\}$.

X кездейсоқ шамасының әрбір мәнінің қабылдану ықтималдықтарын табамыз:

$$p_1 = P(X=2)=\frac{3}{25}, \qquad p_3 = P(X=4)=\frac{9}{25},$$

$$p_2 = P(X=3)=\frac{7}{25}, \qquad p_4 = P(X=5)=\frac{6}{25}.$$

Топ студентінің бағасының, яғни X кездейсоқ шамасының тарату заңын құрамыз:

X	2	3	4	5
P	$\frac{3}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{6}{25}$

Топ студентінің бағасының математикалық күтімін табамыз:

$$E(X)=2\cdot\frac{3}{25}+3\cdot\frac{7}{25}+4\cdot\frac{9}{25}+5\cdot\frac{6}{25}=3{,}72.$$

Ескерту. топ студентінің бағасының

$$X_{\text{орта мәні}}=\frac{2\cdot3+3\cdot7+4\cdot9+5\cdot6+}{25}=2\cdot\frac{3}{25}+3\cdot\frac{7}{25}+4\cdot\frac{9}{25}+5\cdot\frac{6}{25}$$

орташа мәні мен $E(X)$ күтілетін мәндерін салыстырсақ, $E(X)=X_{\text{орта мәні}}$ теңдігін, яғни кездейсоқ шаманың күтілетін мәнінің сол шаманың орта мәнін беретінін көреміз. Айырмашылығы орта мән анықтамасы бойынша кездейсоқ шаманың мәндерінің саны арқылы табылса, тарату заңы бойынша кездейсоқ шаманың мәндерінің қабылдану ықтималдықтары (салмақтары, коэффициенттері) арқылы табылады.

Ескерту. Бірдей заңды кездейсоқ шамалардың орташа мәндері де бірдей болады.

Бірақ орташа мәндерінің бірдейлігінен заңдарының бірдейлігі шықпайды.

Мысалы,

X	-1	0	1
P	0,2	0,8	0,2

және

Y	-1	1
P	0,5	0,5

заңдарымен берілген X және Y шамаларының орташа мәндері бірдей, $E(X)=E(Y)=0$, ал заңдары әртүрлі.

14.2-тұжырым.

X кездейсоқ шамасы $(\Omega, \wp(\Omega), P)$ ықтималдық кеңістігінде берілген, $u: X(\Omega) \to R$ және $Y = u(X)$ болсын. Онда

$$E(Y) = \sum_{x \in X(\Omega)} u(x) P(X = x)$$

болады.

Дәлелдеуі:

$$Y(\Omega)=\{y_1,\ldots,y_p\},$$

$$N_i=\{x\in X(\Omega), u(x)=y_i\},$$

$$\bigcup_{i=1}^{p} N_i = X(\Omega)$$

болсын. Онда

$$P(Y=y_i)=P(X\in N_i)=\sum_{x\in N_i} P(X=x)$$

теңдігі орынды болады да, математикалық күтім мен осы теңдіктен

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{p} y_i P(Y=y_i)=\sum_{i=1}^{p} y_i\left(\sum_{x\in N_i} P(X=x)\right)=\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{x\in N_i} u(x)P(X=x)\right)=$$

$$=\sum_{x\in X(\Omega)} u(x)P(X=x).$$

теңдігі шығады.

14.8-мысал:

$$E(X^2)=\sum_{x\in X(\Omega)} x^2 P(X=x);$$

$$E(2X^2+X+1)=\sum_{x\in X(\Omega)}(2X^2+X+1)P(X=x);$$

$$E(e^x)=\sum_{x\in X(\Omega)} e^x P(X=x).$$

14.3-тұжырым.

1. $E(aX+b)=aE(X)+b$;
2. Егер $X \geq b$ болса, онда $E(X) \geq 0$;
3. Егер $X(\Omega) \subset [a,b]$ болса, онда $E(X) \in [a,b]$;
4. Егер $X(\Omega)=\{\lambda\}$, яғни X мән ретінде тек λ тұрақтысын қабылдаса, онда $E(X)=\lambda$ болады.

Дәлелдеуі:

$$E(aX+b)=\sum_{x \in X(\Omega)}(aX+b)P(X=x)=a\sum_{x \in X(\Omega)}xP(X=x)+b\sum_{x \in X(\Omega)}P(X=x)=aE(X)+b.$$

14.4-тұжырым.

$(\Omega, \wp(\Omega), P)$ ықтималдық кеңістігінде берілген X, Y кездейсоқ шамалары үшін

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

теңдігі орынды болады.

14.4-тұжырым.

$(\Omega, \wp(\Omega), P)$ ықтималдық кеңістігінде берілген X, Y кездейсоқ шамалары үшін

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

теңдігі орынды болады.

Шешімі: X_1 - бірінші сүйекте түскен, X_2 - екінші сүйекте түскен сан болсын. Онда, $X = X_1 + X_2$ болатындықтан, тұжырым бойынша

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2)$$

болады.

X_1 және X_2 - кездейсоқ шамалары бірдей заңды болғандықтан $E(X_1) = E(X_2)$ болады да, соңғы теңдіктен

$$E(X) = E(X_1) + E(X_1) = 2E(X_1)$$

теңдігі шығады.

X_1 кездейсоқ шамасы

$x \in X(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$

заңымен таратылған. Онда математикалық күтімнің анықтамасы бойынша

$$E(X_1) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6}$$

болады да,

$$E(X) = 2E(X_1) = 2 \cdot \frac{21}{6} = 7$$

болады.

14.4-анықтама. $(\Omega, \wp(\Omega), P)$ ықтималдық кеңістігінде берілген X *кездейсоқ шамасының дисперсиясы* деп

$$V(X) = E(X - m)^2$$

санын айтамыз, мұндағы $m = E(X)$.

Ескерту: Анықтамадан, дисперсияның кездейсоқ шаманың мәндерінің өзінің орта мәнінен ауытқуларының квадраттарының орта мәнін беретіні, яғни дисперсияның кездейсоқ шаманың өзінің орта мәнінен ауытқуын сипаттайтындығы шығады: дисперсияның аздығы кездейсоқ шаманың, кейбір кіші ықтималдықты мәндерінен басқа мәндерінің оның орта мәніне жақындығын көрсетеді.

14.5-тұжырым.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Дәлелдеуі:

$$V(X) = E(X-m)^2 = E(X^2 - 2mX + m^2) = E(X^2) - 2mE(X) + m^2 =$$

$$= E(X^2) - 2m \cdot m + m^2 = E(X^2) - m^2.$$

14.5-анықтама. X кездейсоқ шамасының *орташа квадраттық ауытқуы* деп

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

санын айтамыз, мұндағы $m=E(X)$.

Теріс емес $(X-m)^2$ шамасының орта мәні болғандықтан, кез келген кездейсоқ X шамасы үшін $V(X)=E(X-m)^2\geq 0$ болады. Сондықтан $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ орташа квадраттық ауытқуы кез келген кездейсоқ X шамасы үшін бар болады.

$V(X)=0$ теңдігі тек $X(\Omega)=\{c\}$ болатын шама үшін ғана, яғни тек X тұрақты болғанда ғана орындалады.

14.6-тұжырым.

$$V(aX+b)=a^2V(X),$$

$$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X).$$

Дәлелдеуі: $Y = aX + b$ болсын. Математикалық күтімнің қасиеті бойынша

$$E(Y) = E(aE(X) + b) = aE(X) + b\,.$$

Алдыңғы екі теңдіктен шығатын

$$Y - E(Y) = a(X - E(X))$$

теңдігінің негізінде келесі теңдікті аламыз:

$$V(aX + b) = V(Y) = E((Y - E(Y))^2) =$$

$$= E\left(a^2 (X - E(X))^2\right) = a^2 E((X - E(X))^2) = a^2 V(X).$$

$$\sigma(aX+b) = \sqrt{V(aX+b)} = \sqrt{a^2 V(X)} = |a|\sqrt{V(X)} = |a|\sigma(X).$$

Келесі есептер есептің мағынасына қарай таратылым заңдылықтарын дұрыс құрып, кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамаларын табуға беріледі.

14.10-мысал:

Біз құстардың сақинасын сынағымыз келеді. Әрбір сақина $1-p$ ықтималдығымен ақаулы және $p=0{,}98$. Сақиналардың арасында тәуелсіздік бар деп есептейік.

Біз n сақиналарды тексерудің екі әдісін салыстырғымыз келеді:

1) Біз әр сақинаны тексереміз, сондықтан біз n сынақ жасаймыз.

2) Біз жаһандық сынақ жасаймыз. Егер бұл сынақ теріс болса, онда барлық сақиналар дұрыс. Кері жағдайда, біз әрбір сақинаны тексереміз. Сынақтардың санына тең кездейсоқ шама ретінде X_n алынсын.

а) Заңды және X_n шамасының орта мәнін көрсетіңіз.

ә) $f:\begin{matrix}[2,+\infty[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 1-xp^x\end{matrix}$ болсын. $[2,\alpha[$ интервалында $f<0$ және $]\alpha,+\infty[$ интервалында $f<0$ болатындай бір ғана $\alpha>0$ болатынын көрсетіңіз.

б) Ең үнемді әдіс қандай (n-ге байланысты)?

Шешімі:

а) Заң және X_n шамасының орта мәні:

$X_n(\Omega)=\{1,n+1\}$;

$P(X_n=1)=p^n,\ P(X_n=n+1)=1-p^n$;

$E(X_n)=p^n+(n+1)(1-p^n)$.

ә) $f(x)=1-xe^{x\ln p}, f'(x)=e^{x\ln p}(-x\ln p-1)$.

$-\frac{1}{\ln p}=0{,}25<2$, онда f өседі;

$f(2)=1-2p^2=-0{,}92$ және $\lim\limits_{+\infty} f(x)=1$, f үзіліссіз, онда $[2,\alpha[$ интервалында $f<0$ және $]\alpha,+\infty[$ интервалында $f<0$ болатындай бір ғана $\alpha>0$ болады.

б) n -ге қатысты үнемді әдіс:

$E(X_n)<n \Leftrightarrow -np^n+1<0 \Leftrightarrow f(n)<0 \Leftrightarrow n<\alpha$.

14.11-мысал: Екі түрлі түсті (бір ақ және бір қызыл) $2n+1$ тиын лақтырыңыз. Бір түс (және бір ғана) тақ рет пайда болады. Осы тақ санға тең кездейсоқ шама ретінде X алынсын. Оның заңын және оның орташа мәнін көрсетіңіз.

Шешімі:

$$X(\Omega)=\{1,3,\ldots,2n+1\}$$

$\forall k\in\{0,\ldots,n\},\ X=2k+1\Leftrightarrow 2k+1$ тиындар қызыл немесе $2k+1$ тиын ақ береді. Олай болса

$$P(X=2k+1)=2\binom{2n+1}{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1},$$

$$\sum_{k=0}^{n}P(X=2k+1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\frac{(1+1)^{2n+1}-(1-1)^{2n+1}}{2}=1,$$

$$E(X)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\binom{2n+1}{2k+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}(2n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k},$$

$$E(X)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}(2n+1)\frac{(1+1)^{2n+1}-(1-1)^{2n+1}}{2}=\frac{2n+1}{2}.$$

14.12-мысал:

A қорабында 2 шар, ал B қорабында 5 шар бар. Бір қорап бос болғанша A немесе B қорабына кездейсоқ шар аламыз.

X басқа қораптағы шарлар санына тең кездейсоқ шама болсын. X заңын және орташа мәнін көрсетіңіз.

Шешімі: $X(\Omega)=\{1,...,5\}$.

A_i = «i-ші сәтте A -дан допты таңда»,

B_i = «i-ші сәтте B -дан допты таңда» болсын.

$$P(X=5)=P(A_1\cap A_2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2;$$

$$P(X=4)=P(A_1\cap B_2\cap A_3)+P(B_1\cap A_2\cap A_3)=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

$X=3\Leftrightarrow$ «біз 3 бірінші таңдау кезінде екі рет B таңдаймыз және 4-ші рет A таңдаймыз».

$$P(X=3)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4=3\left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

$X=2\Leftrightarrow$ «біз A-ны 5-ші рет босатамыз немесе B-ны босатамыз»

$$P(X=2)=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^5=5\left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

$X=1\Leftrightarrow$ «біз 5 бірінші таңдау кезінде бір рет A және 4 рет B таңдаймыз»

$$P(X=1)=\binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^5=5\left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

Тексеру: $\sum_{k=1}^{5}P(X=k)=1$.

$$E(X)=\sum_{k=1}^{5}kP(X=k)=\frac{105}{32}.$$

Қайталау сұрақтары

1. Кездейсоқ шама ұғымы.
2. Кездейсоқ шамалардың түрлері.
3. Кездейсоқ шамасының мәндерінің жиыны немесе бейнелерінің кеңістігі ұғымы.
4. Кездейсоқ шамасының күтілетін мәні (математикалық күтімі) немесе орта мәні ұғымы.
5. Кездейсоқ шамасының заңы немесе таратылымы (үлестірімі).
6. Кездейсоқ шамасының дисперсиясы.



Әдебиеттер тізімі

1. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. I, II бөлімдер. Алматы 2000 ж.
2. Хисамиев Н.Г. Математика. Оқу құралы. 1, 2 бөлім. Өскемен: ШҚМТУ, 2006. - 271 б.
3. Махмеджанов Н. Жоғары математика есептерінің жинағы: оқу құралы. Алматы: Әл-Фараби ат.ҚазУ. - 2005.-341 б.
4. Қабдықайыр Қ. Жоғары математика. Алматы: Қазақ университеті, 2004. 562 б.
5. Айдос Е. Ж. Жоғары математика Т.2., Т.3. Алматы: Бастау , 2008. - 238 б.
6. Жолымбаев О.М. Математика. Алматы: [б. и.], 2004. - 384 б.
7. Сақабеков Ә. Техникадағы математика. Алматы: ҚБТУ, 2008. - 293 б

Назар аударғаныңызға рақмет!

