Тәжірибелік сабақ №15

15. Үлкен сандар заңы. Чебышев теңсіздігі. Үзіліссіз кездейсоқ шама ықтималдығы үлестірімділігінің интегралдық және дифференциалдық функциясы. Үзіліссіз кездейсоқ шаманың сандық сипаттамалары және олардың қолданысы

15.1-мысал:

1) X – 1-ден n-ге дейін нөмірленген n шардың ішінен сәтіне қарай алынған шар болсын. Онда $X \hookrightarrow U(\{1,\dots,n\})$.
2) X – теңдестірілген (тығыздығы бірқалыпты) ойын текшесін тастағанда түскен сан болсын. Онда $X \hookrightarrow U(\{1,\dots,6\})$.

15.2-мысал:

1) p - сәттілік ықтималдықты Бернулли сынағы деп екі нәтижелі сынақ деп атаймыз: сәттілік (p ықтималдықты) немесе сәтсіздік ($q=1-p$ ықтималдықты), Бернулли сынағы кезінде сәттілік ретінде $X=1$ болса, онда $p=p(X=1)$ және $X \hookrightarrow B(p)$.
2) A – қандай да бір кездейсоқ оқиғасы болсын, егер A орындалса $X=1$, әйтпесе $X=0$ болсын. Онда $X \hookrightarrow B(P(A))$.

15.3-мысал: Үміткер 20 сұраққа жауап беруі керек. Әр сұрақта 4 мүмкін жауап бар, оның тек біреуі дұрыс жауап. Егер үміткер дұрыс жауап берсе, 100 доллар ұтып алады. Әйтпесе, ол 3 ықтимал жауаппен қайта жауап бере алады. Егер ол дұрыс жауап берсе 10 доллар ұтады, басқа жағдайда ештеңе ұтпайды. Біз толығымен кездейсоқ жауап беретін үміткерді қарастырамыз.

а) X заңы бойынша (сәйкесінше Y) дұрыс бірінші (сәйкесінше екінші) жауапқа тең кездейсоқ шаманы қойыңыз.

ә) Үміткердің орташа жалақысын көрсетіңіз.

Шешімі:

а) Бізде табыс ықтималдығы $p=\frac{1}{4}$ тең 20 тәуелсіз Бернулли тәжірибесі бар (табыс - бірінші реттен дұрыс жауап беру). X табыстар санын есептейді: $Y \hookrightarrow B\left(20,\frac{1}{4}\right)$.

Бізде 20 тәуелсіз Бернулли тәжірибесі бар, табыс ықтималдығы $p=\frac{3}{4}\frac{1}{3}$. (табыс - бірінші рет дұрыс емес және екінші рет дұрыс жауап беру).

Y табыстар санын санайды: $Y \hookrightarrow B\left(20,\frac{1}{4}\right)$.

ә) G табысы болсын:

$G=100X+10X$,

$E(G)=100E(X)+10E(Y)=550.$

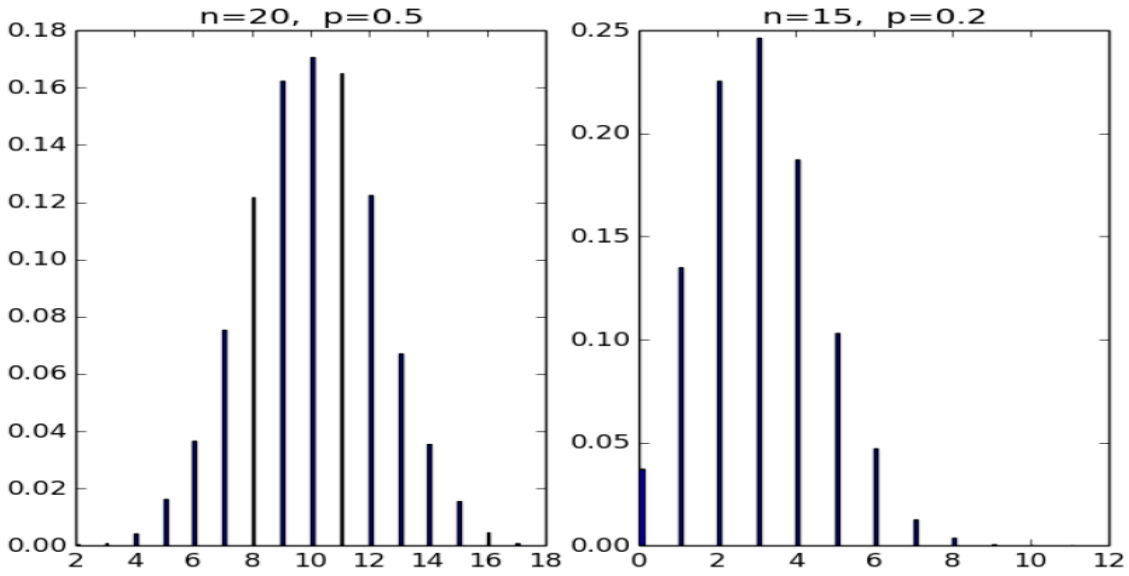
15.4-мысал: Бернуллидің p - сәттілік ықтималдықты n тәуелсіз сынағы жүргізілсін. Егер X - сәттіліктер саны болса, онда $X \hookrightarrow B(n,p)$ болады.

Дәлелдеуі: $X(\Omega)=\{0,...,n\}$ және k сәттілік пен $n-k$ сәтсіздіктен тұратын $p^k q^{n-k}$ әрбір тізбек ықтималдығымен пайда бола алады, ($k \in \{0,...,n\}$).

Ал k сәттілік пен $n-k$ сәтсіздіктен тұратын тізбектер сан k элементті комбинациялар санына, яғни $\binom{n}{k}$ санына тең. Онда $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ болады.

Сонымен $X(\Omega)=\{0,...,n\}$ және $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$, яғни $X \hookrightarrow B(n,p)$.

B(20, 0,5) және B(15, 0,2) үшін таяқшалық диаграммаларын келтіреміз:



15.5-мысал: Бір күнде даярланған өнімдердің саны орта мәні 50 болатын кездейсоқ шаманы берсе, онда

а) ертеңгі күні өнім шығару 75-ке жететіндей ықтималдық бағасын;

ә) стандарттық вариация 5-ке тең болған жағдайын да осы сұрақтың шешімі анықталса.

Шешімі:

а) Марков теңсіздігі бойынша $P(X \geq 75) \leq \frac{E(X)}{75} = \frac{2}{3}$;

ә) Биенаме-Чебышев теңсіздігі бойынша

$$P(|X - 50| \geq 55) \leq \frac{V(X)}{25^2} = \frac{5^2}{25^2} = 0{,}04.$$

15.6-мысал: Жай тас (шахмат ойынындағы «пешка») өс бойымен 1 бірлік секірумен оңға немесе солға кездейсоқ қозғалады. Жай тас бастапқыда O нүктесінде болады. D_n - бірінші n секіру кезінде оң жақтан секірулер саны, ал X_n - жай тастың орны болсын.

а) D_n заңын құрыңыз және X_n өрнегін D_n арқылы жазыңыз;

ә) $E(X_n)$, $V(X_n)$ есептелуін көрсетіңіз;

б) $P\left(|X_n| < \frac{n}{10}\right) \geq 0{,}9$ болатындай n-ге жеткілікті шарт қойыңыз.

Шешімі:

а) есептің шартынан

$$D_n \hookrightarrow B\left(n, \frac{1}{2}\right)$$

және

$$X_n = D_n - (n - D_n) = 2D_n - n,$$

ә) $E(X_n) = 2E(D_n) - n = 0$,

$V(X_n) = 4V(D_n) = 0$.

б) Биенаме-Чебышев теңсіздігі бойынша

$$P\left(|X_n - E(X_n)| \geq \frac{n}{10}\right) \leq \frac{100V(X_n)}{n^2} = \frac{100}{n},$$

$$P\left(|X_n| < \frac{n}{10}\right) \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - P\left(|X_n - E(X_n)| \geq \frac{n}{10}\right) \geq 0{,}9 \Leftrightarrow P\left(|X_n - E(X_n)| \geq \frac{n}{10}\right) \geq 0{,}1.$$

Егер $\frac{100}{n} \le 0{,}1$, онда $P\left(|X_n| < \frac{n}{10}\right) \ge 0{,}9$.

$P\left(|X_n| < \frac{n}{10}\right) \ge 0{,}9$ болатындай n-ге жеткілікті шарт $n \ge 1000$.