Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫҢ НЕГІЗГІ ЗАҢДАРЫ

Дәрістік сабақ жоспары:

1. Бірқалыпты заң;
2. Бернулли заңы;
3. Биномдық заң.

15.1 Бірқалыпты заң

15.1-анықтама. X кездейсоқ шамасының тарату заңы *бірқалыпты* деп аталады, егер ол

$$X(\Omega)=\{1,\ldots,n\},\ P(X=k)=\frac{1}{n},\ \mathrm{k}\in\{1,\ldots,n\}$$

түрінде жазылса.

X кездейсоқ шамасының тарату заңы бірқалыпты дегенді, қысқаша, $X \hookrightarrow U(\{1,\ldots,n\})$ түрінде жазамыз.

15.1-мысал:

1) X – 1-ден n -ге дейін нөмірленген n шардың ішінен сәтіне қарай алынған шар болсын. Онда $X \hookrightarrow U(\{1,\ldots,n\})$.
2) X – теңдестірілген (тығыздығы біркалыпты) ойын текшесін тастағанда түскен сан болсын. Онда $X \hookrightarrow U(\{1,\ldots,6\})$.

15.1-тұжырым. Егер $X \hookrightarrow U(\{1, \ldots, n\})$ болса, онда

$X \hookrightarrow U(\{1, \ldots, n\})$ және $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$

болады.

Дәлелдеуі:

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n} kP(X=k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2n}=\frac{n+1}{2}.$$

15.2 Бернулли заңы

15.2-анықтама. X айнымалысы - $p\,(p \in]0,1[)$ *параметрлі* *Бернулли айнымалысы* деп аталады, егер

$$X(\Omega)=\{0,1\},\ P(X=1)=p,\quad P(X=0)=1-p=q$$

болса.

X - p параметрлі Бернулли айнымалысы дегенді, қысқаша, $X \hookrightarrow B(p)$ түрінде жазамыз.

15.2-мысал:

1) p - сәттілік ықтималдықты Бернулли сынағы деп екі нәтижелі сынақ деп атаймыз: сәттілік (p ықтималдықты) немесе сәтсіздік ($q = 1 - p$ ықтималдықты), Бернулли сынағы кезінде сәттілік ретінде $X = 1$ болса, онда $p = p(X = 1)$ және $X \hookrightarrow B(p)$.

2) A – қандай да бір кездейсоқ оқиғасы болсын, егер A орындалса $X = 1$, әйтпесе $X = 0$ болсын. Онда $X \hookrightarrow B(P(A))$.

15.2-тұжырым. Егер $X \hookrightarrow B(p)$ болса, онда $E(X) = p$ және $V(X) = pq$ болады.

Дәлелдеуі:

$$E(X) = 1 \times P(X = 1) + 0 \times P(X = 0) = p$$

$X^2 = X$, онда

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

15.3-анықтама. $(\Omega, \wp(\Omega), P)$ ықтималдық кеңістігінде берілсін. X, Y кездейсоқ шамалары *тәуелсіз* деп аталады, егер кез келген $(x, y) \in X(\Omega) \times X(\Omega)$ үшін

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times X(\Omega),$$

$$\mathrm{P}((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x)\, P(Y = y)$$

тендігі орынды болса.

15.3-тұжырым. Егер X және Y кездейсоқ шамалары тәуелсіз және $X \hookrightarrow B(n,p)$, $Y \hookrightarrow B(m,p)$ болса, онда $X+Y \hookrightarrow B(n+m,p)$ болады.

Дәлелдеуі: Бернуллидің p - сәттілік ықтималдықты $n+m$ тәуелсіз сынағы жүргізілсін.

X бірінші n сынақтардағы сәттіліктер саны, ал Y соңғы m сынақтардағы сәттіліктер саны болсын. $X+Y$ саны Бернуллидің p - сәттілік ықтималдықты $n+m$ сынақтардағы сәттіліктер саны болады. Сонымен қатар

$$X \hookrightarrow B(n,p),$$
$$Y \hookrightarrow B(m,p)$$

сынақтар тәуелсіз болғандықтан, X және Y тәуелсіз кездейсоқ шамалары болады. Онда

$$X+Y \hookrightarrow B(n+m,p).$$

15.3-мысал: Үміткер 20 сұраққа жауап беруі керек. Әр сұрақта 4 мүмкін жауап бар, оның тек біреуі дұрыс жауап. Егер үміткер дұрыс жауап берсе, 100 доллар ұтып алады. Әйтпесе, ол 3 ықтимал жауаппен қайта жауап бере алады. Егер ол дұрыс жауап берсе 10 доллар ұтады, басқа жағдайда ештеңе ұтпайды. Біз толығымен кездейсоқ жауап беретін үміткерді қарастырамыз.

а) X заңы бойынша (сәйкесінше Y) дұрыс бірінші (сәйкесінше екінші) жауапқа тең кездейсоқ шаманы қойыңыз.

ә) Үміткердің орташа жалақысын көрсетіңіз.

Шешімі:

а) Бізде табыс ықтималдығы $P=\frac{1}{4}$ тең 20 тәуелсіз Бернулли тәжірибесі бар (табыс - бірінші реттен дұрыс жауап беру).
X табыстар санын есептейді: $Y \hookrightarrow B\left(20,\frac{1}{4}\right)$.
Бізде 20 тәуелсіз Бернулли тәжірибесі бар, табыс ықтималдығы $p=\frac{3}{4}\frac{1}{3}$. (табыс - бірінші рет дұрыс емес және екінші рет дұрыс жауап беру).
Y табыстар санын санайды: $Y \hookrightarrow B\left(20,\frac{1}{4}\right)$.

ә) G табысы болсын:
$G=100X+10X,$
$E(G)=100\,E(X)+10\,E(Y)=550.$

15.3 Биномдық заң

15.4-анықтама. X айнымалысы n және p $(n \in N, p(p \in]0,1[))$ *параметрлі биномдық айнымалы* деп аталады, егер $X(\Omega) = \{0,\ldots, n\}$ және кез келген $k \in \{0,\ldots, n\}$ үшін

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

болса.

X айнымалысы n және p параметрлі Бернулли айнымалысы дегенді, қысқаша, $X \hookrightarrow B(n,p)$ түрінде жазамыз.

Ескерту.

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1,$$

яғни ықтималдықтар заң ықтималдықтарына қойылатын қажетті шартты қанағаттандырады.

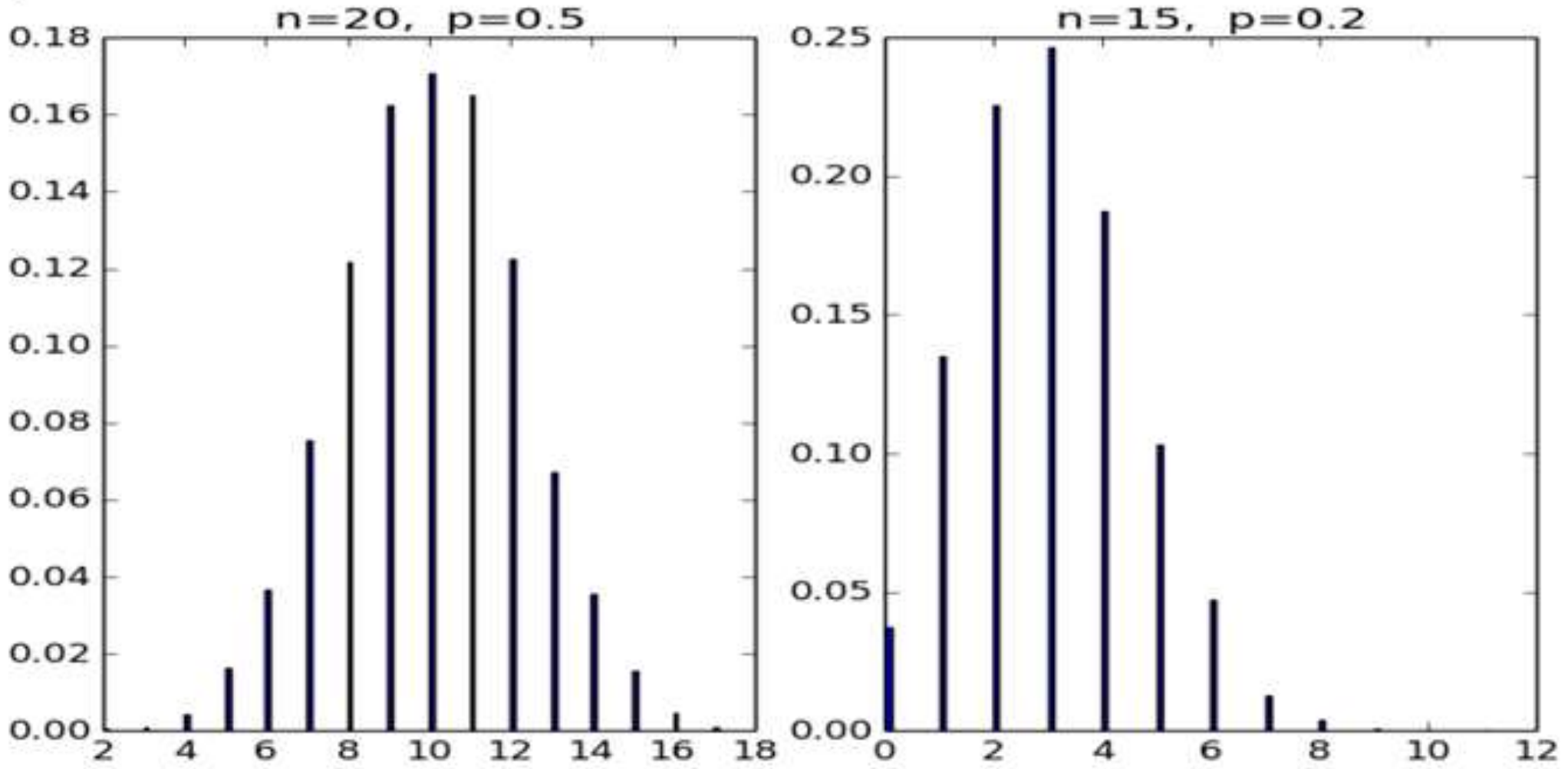
15.4-мысал: Бернуллидің p - сәттілік ықтималдықты n тәуелсіз сынағы жүргізілсін. Егер X - сәттіліктер саны болса, онда $X \hookrightarrow B(n,p)$ болады.

Дәлелдеуі: $X(\Omega)=\{0,\ldots,n\}$ және k сәттілік пен $n-k$ сәтсіздіктен тұратын $p^k q^{n-k}$ әрбір тізбек ықтималдығымен пайда бола алады, $(k\in\{0,\ldots,n\})$.

Ал k сәттілік пен $n-k$ сәтсіздіктен тұратын тізбектер сан k элементті комбинациялар санына, яғни $\binom{n}{k}$ санына тең. Онда $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ болады.

Сонымен $X(\Omega)=\{0,\ldots,n\}$ және $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$, яғни $X\hookrightarrow B(n,p)$.

B(20, 0,5) және B(15, 0,2) үшін таяқшалық диаграммаларын келтіреміз:



15.4-тұжырым. Егер $X \hookrightarrow B(n, p)$ болса, онда

$$E(X) = np \quad \text{және} \quad V(X) = npq$$

болады.

Дәлелдеуі:

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \ .$$

Бұдан

$$\forall k \in \{1,\ldots, n\},\ k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$= k\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

болғандықтан,

$$E(X) = np\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{n-1-k+1} = np\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^i q^{n-1-i} =$$

$$= np(p+q)^{n-1} = np$$

тендігі шығады. Онда

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{n-1-k+1} =$$

$$= np\sum_{i=0}^{n-1} i\binom{n-1}{i}p^i q^{n-1-i} = np(n-1)p \ .$$

$V(X)$ дисперсиясын $E(X(X-1))$ және $E(X)=np$ арқылы өрнектейміз:

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=E(X^2)-E(X)+E(X)-(E(X))^2=$$
$$=E(X^2-X)+E(X)-(E(X))^2=$$
$$=E(X(X-1))+E(X)-(E(X))^2.$$

$E(X(X-1))$ және $E(X)$ мәндерін қою арқылы

$$V(X)=E(X(X-1))+E(X)-E(X)^2=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=$$
$$=n(p-p^2)=npq$$

теңдігін аламыз.

Тұжырымды дәлелдеудің басқадай бір тәсілін келтірейік.

Егер i – ші сынақта сәттілік орын алса $X_i = 1$, ал сәтсіздік орын алса $X_i = 0$ болсын.

$X_i \hookrightarrow B(1,p)$ болғандықтан, $E(X_i) = p$ және $V(X_i) = pq$ болады.

Сәттіліктердің жалпы саны X үшін

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

теңдігі орынды болады.

Онда, математикалық күтімнің қасиеті мен $E(X_i) = p$ теңдігі негізінде келесі теңдікке келеміз:

$$E(X) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np.$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ шамаларының тәуелсіздігі мен $V(X_i) = pq$ теңдігі

$$V(X) = V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq.$$

теңдігін аламыз.

15.5-тұжырым (Марков теңсіздігі).

Егер X оң кездейсоқ шама болса, онда кез келген $a > 0$ саны үшін

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

теңсіздігі орынды болады.

Дәлелдеуі:

$$E(X)=\sum_{x\in X(\Omega),\ 0<x<a} xP(X=x)+\sum_{x\in X(\Omega),\ x\geq a} xP(X=x)\geq \sum_{x\in X(\Omega),\ x\geq a} xP(X=x)\geq$$

$$\geq \sum_{x\in X(\Omega),\ x\geq a} aP(X=x)=a\sum_{x\in X(\Omega),\ x\geq a} P(X=x)=aP(X\geq a).$$

Сонымен $E(X)\geq aP(X\geq a)$ болатынын алдық.

Бұл теңсіздіктен, $P(X\geq a)>0$ болғандықтан,

$$P(X\geq a)\leq \frac{E(X)}{a}$$

теңсіздігін аламыз.

15.6-тұжырым (Биенаме-Чебышев теңсіздігі).

Кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

теңсіздігі орынды болады.

Дәлелдеуі: X – қандай да бір кездейсоқ шама және $\varepsilon > 0$ болсын. Кез келген X кездейсоқ шамасы үшін $(X-m)^2$ - оң кездейсоқ шама болады. Онда, Марков теңсіздігі бойынша,

$$P((X-E(X))^2) \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E((X-E(X))^2)}{\varepsilon^2}$$

теңсіздігі орынды болады.

Бұл теңсіздіктен,

$$(X-E(X))^2 \geq \varepsilon^2 \Leftrightarrow |X-E(X)|$$

және

$$E(X-E(X))^2 = V(X)$$

болатынын ескерсек, Биенаме-Чебышевтың

$$P(|X-E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

теңсіздігін аламыз.

Ескерту.

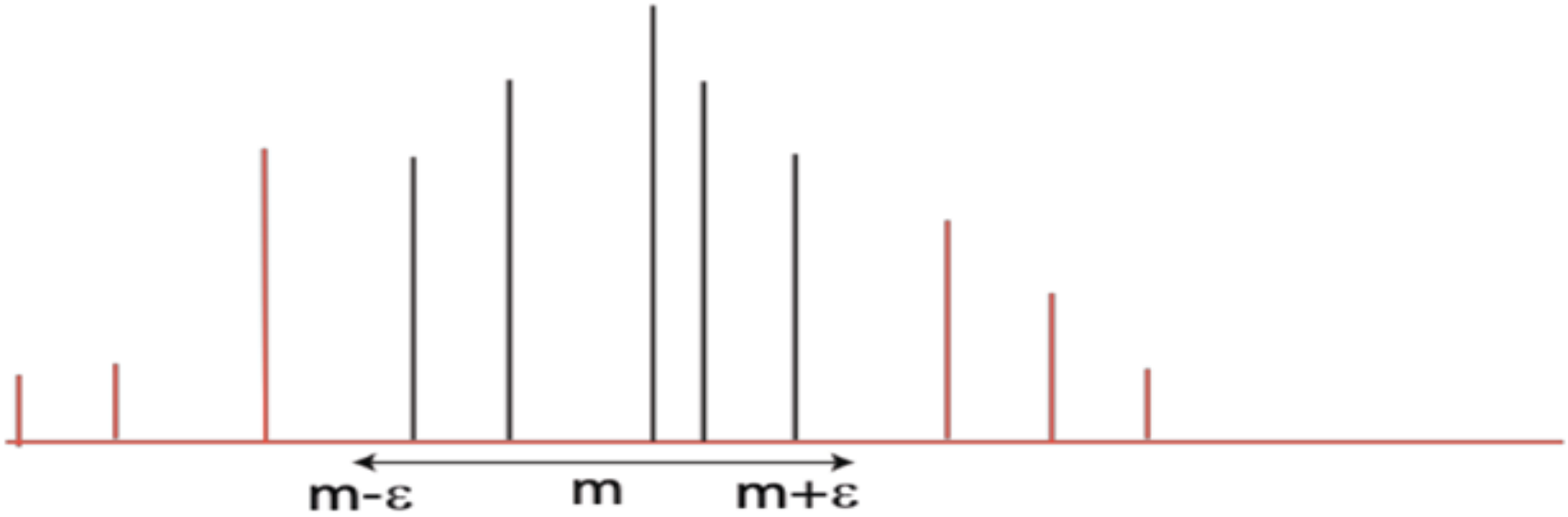
Биенаме-Чебышев теңсіздігі X кездейсоқ шамасының өзінің $E(X)$ орта мәнінен ауытқуының ε санынан кем болмауының ықтималдығы $\frac{V(X)}{\varepsilon^2}$ санынан артпайды дегенді білдіреді.

ε - неғұрлым үлкен болса, ықтималдық солғұрлым кіші болады.

Басқаша Биенаме-Чебышев теңсіздігі

$$P\left(E(X)-\varepsilon < X < E(X)+\varepsilon\right) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

түрінде жазылады.



15.7-тұжырым. Егер $X_1,...,X_n,...$ - бірдей заңды, орта мәндері бір m санына және дисперсиялары бір σ^2 тең болатын тәуелсіз кездейсоқ шамалар болса, онда кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{X_1 + ... + X_n}{n} - m \right| \geq \varepsilon \right) = 0$$

болады.

Математикалық күтімнің қасиеті бойынша

$$E(M_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}nm=m$$

теңдігі орынды болады.

Шарт бойынша $X_1,\ldots,X_n$ кездейсоқ шамалары тәуелсіз болғандықтан

$$V(M_n)=\frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

теңдігі орынды болады.

Биенаме-Чебышев теңсіздігі негізінде

$$0 \le \mathrm{P}\left(\left|M_n - E(M_n)\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{V(M_n)}{\varepsilon^2}$$

теңсіздіктерін аламыз.

Бұл теңсіздіктер мен $M_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$, $E(M_n) = m$ және $V(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}$

теңдіктерінен шығатын

$$0 \le \mathrm{P}\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - m\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2}$$

теңсіздіктерінде шекке көшсек

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - m\right| \ge \varepsilon\right) = 0$$

теңдігін аламыз.

15.5-мысал: Бір күнде даярланған өнімдердің саны орта мәні 50 болатын кездейсоқ шаманы берсе, онда

а) ертеңгі күні өнім шығару 75-ке жететіндей ықтималдық бағасын;

ә) стандарттық вариация 5-ке тең болған жағдайын да осы сұрақтың шешімі анықталса.

Шешімі:

а) Марков теңсіздігі бойынша $P(X \geq 75) \leq \frac{E(X)}{75} = \frac{2}{3}$;

ә) Биенаме-Чебышев теңсіздігі бойынша

$$P(|X - 50| \geq 55) \leq \frac{V(X)}{25^2} = \frac{5^2}{25^2} = 0{,}04 .$$

15.6-мысал: Жай тас (шахмат ойынындағы «пешка») өс бойымен 1 бірлік секірумен оңға немесе солға кездейсоқ қозғалады. Жай тас бастапқыда O нүктесінде болады. D_n - бірінші n секіру кезінде оң жақтан секірулер саны, ал X_n - жай тастың орны болсын.

а) D_n заңын құрыңыз және X_n өрнегін D_n арқылы жазыңыз;

ә) $E(X_n)$, $V(X_n)$ есептелуін көрсетіңіз;

б) $P\left(|X_n| < \frac{n}{10}\right) \geq 0{,}9$ болатындай n-ге жеткілікті шарт қойыңыз.

Шешімі:

а) есептің шартынан

$$D_n \hookrightarrow B\left(n, \frac{1}{2}\right)$$

және

$$X_n = D_n - (n - D_n) = 2D_n - n,$$

ә) $$E(X_n) = 2E(D_n) - n = 0,$$

$$V(X_n) = 4V(D_n) = 0.$$

б) Биенаме-Чебышев теңсіздігі бойынша

$$P\left(|X_n - E(X_n)| \geq \frac{n}{10}\right) \leq \frac{100V(X_n)}{n^2} = \frac{100}{n},$$

$$P\left(|X_n| < \frac{n}{10}\right) \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - P\left(|X_n - E(X_n)| \geq \frac{n}{10}\right) \geq 0{,}9 \Leftrightarrow P\left(|X_n - E(X_n)| \geq \frac{n}{10}\right) \geq 0{,}1.$$

Егер $\frac{100}{n} \leq 0{,}1$, онда $P\left(|X_n| < \frac{n}{10}\right) \geq 0{,}9$.

$P\left(|X_n| < \frac{n}{10}\right) \geq 0{,}9$ болатындай n-ге жеткілікті шарт $n \geq 1000$.

Қайталау сұрақтары

1. Параметрлі Бернулли айнымалысы ұғымы.
2. Параметрлі биномдық айнымалысы ұғымы.
3. Бірқалыпты заң тұжырымы.
4. Бернулли заңы тұжырымы.
5. Биномдық заң тұжырымы.
6. Марков теңсіздігі қолданысы.
7. Биенаме-Чебышев теңсіздігі.



Әдебиеттер тізімі

1. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. I, II бөлімдер. Алматы 2000 ж.
2. Хисамиев Н.Г. Математика. Оқу құралы. 1, 2 бөлім. Өскемен: ШҚМТУ, 2006. - 271 б.
3. Махмеджанов Н. Жоғары математика есептерінің жинағы: оқу құралы. Алматы: Әл-Фараби ат.ҚазУ. - 2005.-341 б.
4. Қабдықайыр Қ. Жоғары математика. Алматы: Қазақ университеті, 2004. 562 б.
5. Айдос Е. Ж. Жоғары математика Т.2., Т.3. Алматы: Бастау , 2008. - 238 б.
6. Жолымбаев О.М. Математика. Алматы: [б. и.], 2004. - 384 б.
7. Сақабеков Ә. Техникадағы математика. Алматы: ҚБТУ, 2008. - 293 б

Назар аударғаныңызға рақмет!

