Тәжірибелік сабақ №13

13 Толық ықтималдық және Байес формуласы. Қайталанатын тәуелсіз сынақтар. Бернулли формуласы. Лапластың локальдық және интегралдық теоремасы. Тәуелсіз сынақтағы салыстырмалы жиіліктің тұрақты ықтималдықтан ауытқуы. Тәуелсіз сынақтағы ықтималды сан және олардың қолданысы

13.1-мысал: Досыңыздың 2 баласы бар екенін білесіз. Сіз оның үйіне келіп едіңіз, есікті қыз бала ашты. Екінші баланың да қыз болуының ықтималдығы қандай?

Шешімі:

$A =$"досыңыздың балаларының тым болмаса біреуі қыз бала",

$B =$"досыңыздың балаларының екеуі де қыз бала" деген оқиғалар болсын.

Есептің шарты бойынша $P(B/A)$ ықтималдығын табу керек. Шартты ықтималдықтың анықтамасы бойынша

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$

$B \subset A$ болғандықтан, $P(B \cap A) = P(B)$ болады да, соңғы теңдіктен

$$P(B/A)=\frac{P(B)}{P(A)}$$

теңдігін аламыз.

Элементар нәтижелердің жиыны - В={ұл, қыз} екі элементті жиынының барлық 2 – тізімі, яғни

$\Omega =$ {(ұл, ұл), (ұл, қыз), (қыз, ұл), (қыз, қыз)} жиыны болады. Онда

$A =$ {(ұл, қыз), (қыз, ұл), (қыз, қыз)},

$B =$ {(қыз, қыз)}

$|\Omega| = 4, |A| = 3, |B| = 1$

болады да

$$P(B/A)=\frac{\frac{1}{4}}{1-P(\overline{A})}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

болады.

13.2-мысал: Қорапта 1 қызыл шар және бір ақ шар бар. Біз бір доп аламыз. Егер бұл шар қызыл болса, сіз оны қорапқа салып, тағы бір қызыл шарды қосасыз, әйтпесе ақ шарды қорапқа қайта саласыз. Ал сіз n рет қайталайсыз. Әр жолы қызыл шарды ретімен алу ықтималдығы қандай?

Шешімі:

R_k ="k-шы алынған шар қызыл" деген оқиға болсын, $k = 1,2,\ldots,n$.

Есептің шарты бойынша $P(R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n)$ ықтималдығын табу керек.

Құрама ықтималдық формуласы қолданамыз:

$$P(R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n) =$$

$$= P(R_1)P(R_2/R_1)P(R_3/R_1 \cap R_2)\ldots P(R_n / R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_{n-1})$$

$$P(R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1} = \frac{1}{n+1}.$$

13.3-мысал: D қорапшасында 100 зат бар, оның 8-і ақаулы, екінші G қорапшасында 50 зат бар, оның 10-ы ақаулы. Сәтіне қарай алынған қораптан сәтіне қарай алынған заттың ақаулы болу ықтималдығы қандай?

Шешімі:

A ="D қорапшасы алынды";

B="ақаулы зат алынды" деген оқиғалар болсын.

Есептің шарты бойынша $P(B)$ ықтималдығын табу керек.

$(A, \overline{A})$ – үйлесімсіз оқиғалардың толық жүйесі болғандықтан, толық ықтималдық формуласы орынды болады:

$$P(B) = P(A)P(B/A) + P(\overline{A})P(B/\overline{A}) = \frac{1}{2}\frac{8}{100} + \frac{1}{2}\frac{10}{50} = 0{,}14.$$

13.4-мысал: Елімізде бүгін жаңбыр жауса, келесі күні 0,4 ықтималдықпен ауа райы жауынсыз болады, ал бүгін ауа райы жауынсыз болса, келесі күні 0,5 ықтималдықпен жаңбыр жауады. Бүгін ауа райы жауынсыз. Алдыдағы n-ші күннің жауынды болуының ықтималдығын табу керек.

Шешімі:

A_k = "k - күні ауа-райы жақсы" және $p_k = p(A_k)$ болсын.

$\left(A_k, \overline{A}_k\right)$ - үйлесімсіз оқиғалардың толық жүйесі болғандықтан, толық ықтималдық формуласы орын алады:

$$P(A_{k+1}) = P(A_k)P(A_{k+1}/A_k) + P(\overline{A_k})P(A_{k+1}/\overline{A_k})$$

$$P(A_{k+1}/\overline{A_k}) = 0{,}4, \quad P(A_{k+1}/A_k) = 1 - P(\overline{A_{k+1}}/A_k) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

$$P(\overline{A_k}) = 1 - p_k$$

$$p_{k+1} = 0{,}5\,p_k + 0{,}4(1 - p_k) = 0{,}1\,p_k + 0{,}4$$

$$10^{k+1} p_{k+1} = 10^{k+1} \cdot 0{,}1 \cdot p_k + 0{,}4 \cdot 10^{k+1}$$

$$\ell_k = 10^k \cdot p_k$$

белгілеуін енгіземіз.

$$\ell_{k+1} = \ell_k + 4 \cdot 10^k \Rightarrow$$

$$\ell_{k+1} = \ell_{k-1} + 4 \cdot 10^{k-1} + 4 \cdot 10^k =$$

$$= \ell_{k-2} + 4 \cdot 10^{k-2} + 4 \cdot 10^{k-1} + 4 \cdot 10^k = \ldots =$$

$$= \ell_0 + 4 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^2 + \ldots + 4 \cdot 10^{k-2} + 4 \cdot 10^{k-1} + 4 \cdot 10^k =$$

$$= \ell_0 + 4 \cdot (1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{k-2} + 10^{k-1} + 10^k) =$$

$$= \ell_0 + 4 \cdot \frac{10^{k+1} - 1}{10 - 1} = \ell_0 + 4 \cdot \frac{10^{k+1} - 1}{9} = (\ell_0 - \frac{4}{9}) + \frac{4}{9} \cdot 10^{k+1} \Rightarrow$$

$$\ell_{k+1} = (\ell_0 - \frac{4}{9}) + \frac{4}{9} \cdot 10^{k+1} \Rightarrow$$

$$10^{k+1} p_{k+1} = (10^0 p_0 - \frac{4}{9}) + \frac{4}{9} \cdot 10^{k+1} \Rightarrow$$

$$p_{k+1} = 0{,}1^{k+1} \cdot (p_0 - \frac{4}{9}) + \frac{4}{9} \Rightarrow$$

$$p_n = 0{,}1^n \cdot (p_0 - \frac{4}{9}) + \frac{4}{9} \Rightarrow$$

Мұндағы $p_0 = P(A_0)$. Белгілеуіміз бойынша A_0 - бүгінгі күннің жауынсыз болуында тұратын оқиға. Есептің шарты бойынша бүгінгі күн жауынсыз болады, яғни A_0 оқиғасы орындалады, олай болса

$$p_0 = p(A_0) = 1.$$

$p_0 = 1$ мәнін соңғы теңдікке қоя отырып келесі теңдікті аламыз:

$$p_n = 0{,}1^n \cdot (1 - \frac{4}{9}) + \frac{4}{9} = 0{,}1^n \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \Rightarrow$$

$$p_n = 0{,}1^n \frac{5}{9} + \frac{4}{9}.$$

Ескерту. $\lim p_n = \frac{4}{9}$.

13.5-мысал: 1-ден n – ге дейін нөмірленген n қораптың i - ші ($i \in \{1,2, ..., n\}$) нөмірлісінде i ақ шарлар мен $n-i$ қара шарлар бар.

Сәтіне қарай алынған қораптан, алынған шарды қайтара отырып, сәтіне қарай алынған m шардың барлығы ақ болып шықты. Шарлардың тек k - шы нөмірлі қораптан алынуының ықтималдығын табу керек.

Шешімі:

$B_i = «i$ - нөмірлі қорап таңдалды»,

$W = «m$ ақ шар алынды»,

$W_j =$ «j-ші алынған шар - ақ» ($j = \{1,2, ..., m\}$) деген оқиғалар болсын.

$(B_1, .., B_n)$ - үйлесімсіз оқиғалардың толық жүйесі және $\forall i \in \{1, .., n\}$ $P(B_i) = \frac{1}{n} \neq 0$ болғандықтан, Байес формуласы орынды болады:

$$P(B_k / W) = \frac{P(B_k)P(W / B_k)}{\sum_{i=0}^{n} P(B_i)P(W / B_i)}.$$

$P(B_i)$ және $P(W / B_i)$ ықтималдықтарын табамыз:

$$P(B_i) = \frac{1}{n}, i = 1,2,...,n;$$

$$P(W / B_i) = P((W_1 \cap W_2 \cap ... \cap W_m) / B_i) = P(W_1 / B_i) \cdot P(W_2 / B_i) \cdot ... \cdot P(W_m / B_i).$$

Алынған шар қорапқа қайтарылатындықтан, кез келген i үшін

$$P(W_i / B_i) = \frac{i}{n}$$

болады да, алдыңғы теңдіктен

$$P(W / B_i) = P(W_1 / B_i) \cdot P(W_2 / B_i) \cdot ... \cdot P(W_m / B_i) = \frac{i}{n} \cdot ... \cdot \frac{i}{n} = \left(\frac{i}{n}\right)^m$$

болатынын аламыз.

$P(B_i)$ және $P(W / B_i)$ ықтималдықтарының табылған мәндерін қоя отырып

$$P(B_k/W)=\frac{P(B_k)P(W/B_k)}{\sum_{i=0}^{n}P(B_i)P(W/B_i)}=\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^m}{\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^m}=\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{k^m}{n^m}}{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^m}\sum_{i=0}^{n}i^m}=\frac{k^m}{\sum_{i=1}^{n}i^m}$$

болатынын аламыз.

13.6-мысал: Бізде 10 тиын: үшеуі 2 санмен, бесеуі бір елтаңбамен және бір санмен, екеуі 2 елтаңбамен бар. Кездейсоқ тиынға қарамай таңдап үстелге қоямыз. Сонымен, біз көрінетін жағын көреміз: бұл сан жағы. Тиынның екінші жағында елтаңба болу ықтималдығы қандай?

Шешімі:

$A=$"тиынның 2 елтаңбасы бар";

$B=$"тиынның бір елтаңбасы және бір саны бар";

$C=$"тиынның 2 саны бар";

$E=$"көрінетін жағы - елтаңба".

$P(B/E)$ шартты ықтималдығын Байес формуласымен есептесек:

$$P(B/E)=\frac{P(E/B)P(B)}{P(E/A)P(A)+P(E/B)P(B)+P(E/C)P(C)}$$

$$P(E/B)=\frac{1}{2};\ P(E/A)=1;\ P(E/C)=1;$$

$$P(B/E)=\frac{\frac{1}{2}\frac{5}{10}}{\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\frac{5}{10}}=\frac{5}{11}.$$

13.7-мысал: Бізде 3 тиын бар. №1 тиын теңдестірілген, №2 тиын елтаңбасының пайда болу ықтималдығы 0,3. №3 тиында елтаңбасының түсу ықтималдығы p.

а) Егер біз кездейсоқ тиынды таңдасақ, біз екі реттің біреуінде елтаңба аламыз. p ықтималдықты есептеңіз.

ә) Біз кездейсоқ тиынды таңдаймыз және оны 3 рет лақтырамыз. Біз 1 елтаңба және 2 сан аламыз. №1 тиынды таңдау ықтималдығы қандай?

Шешімі:

а) A_i = «i нөмірлі тиын алынды»;

H = «сан алу»;

$$P(H)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(H/A_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+0{,}3+p\right)=\frac{1}{2},$$

$p=0{,}7$.

ә) B = «1 елтаңба және 2 сан алындыз»;

Байес формуласы бойынша:

$$P(A_1/B)=\frac{P(B/A_1)P(A_1)}{P(B/A_1)P(A_1)+P(B/A_2)P(A_2)+P(B/A_3)P(A_3)};$$

$$P(B/A_1)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^3,\ P(B/A_2)=\binom{3}{1}(0{,}3)(0{,}7)^2,\ P(B/A_3)=\binom{3}{1}(0{,}7)(0{,}3)^2;$$

$$P(A_1/B)=\frac{(0{,}5)^3}{(0{,}5)^3+(0{,}3)(0{,}7)^2+(0{,}7)(0{,}3)^2}=0{,}37.$$

13.8-мысал: 2 ойын сүйегін лақтырамыз.

A= "1- сүйекте жұп сан түседі",

B = "2 - сүйекте жұп сан түседі",

C = "сүйектерде түскен сандардың қосындысы жұп сан болады" деген оқиғалар болсын.

A, B, C оқиғаларының қос қостан тәуелсіздігін тексеріңіз.

Шешімі:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B/A)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

және

$$P(A)P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

теңдіктерінен

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

болатыны, яғни оқиғалардың тәуелсіздіктің анықтамасы бойынша, A және B оқиғаларының тәуелсіз оқиғалар болатыны шығады.

$$P(A\cap C)=P(A)P(B/A)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{12}$$

және

$$P(A)P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

теңдіктерінен

$P(A \cap C) = P(A)P(B)$

теңдігінің орындалмайтыны ($P(A \cap C) \neq P(A)P(B)$ болатыны), яғни, оқиғалардың тәуелсіздіктің анықтамасы бойынша, A және B оқиғаларының тәуелсіз оқиғалар болмайтыны шығады.

Онда A, B, C оқиғалары қос-қостан тәуелсіз болмайды.

13.9-мысал: Теңгені n рет лақтыру - n тәуелсіз сынақтар. Қораптан, алынған шарды қайтара отырып, n шар алу - n тәуелсіз сынақтар.

13.10-мысал: Үміткерлер тобы Q_1 және Q_2 екі сұрақтың әрқайсысына әр сұраққа 4 ықтимал жауаппен жауап береді. Егер біреуі шешімді білмесе, ол кездейсоқ жауап береді.

Үміткерлердің $\frac{3}{4}$ бөлігі Q_1 сұрағының жауабын білмейді;

Үміткерлердің $\frac{2}{3}$ бөлігі Q_1 сұрағының жауабын білмейді;

Үміткерлердің $\frac{1}{2}$ бөлігі Q_1 немесе Q_2 жауабын білмейді.

Біз үміткерді кездейсоқ таңдаймыз.

а) Үміткердің екі сұраққа да дұрыс жауапты таңдау ықтималдығын есептеңіз.

ә) Үміткер екі сұраққа да дұрыс жауап береді. Қайсысы ықтимал: үміткер ешбір шешімді білмейді, 1-ші шешімді білмейді, 2-шешімді білмейді?

Шешімі:

а) $A =$ "Үміткер Q_1 шешімін біледі",

$B =$ "Үміткер Q_2 шешімін біледі".

$P(A) = \frac{1}{4}$ және $P(B) = \frac{1}{3}$

$A_0 =$ «Үміткер шешімді білмейді»: $P(A_0) = \frac{1}{2}$;

$A_1 =$ «үміткер Q_2 емес, Q_1 шешімін біледі»:

$P(A_1) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{6}$;

$A_2 =$ «үміткер Q_1 емес, Q_2 шешімін біледі»: $P(A_2) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4}$;

$A_{1,2}$ = «үміткер Q_2 және Q_1 есептерінің шешімін біледі»:

$$P(A_{1,2}) = P(A \cap B) = \frac{1}{12};$$

E_i = «кандидат i сұрағына дұрыс жауап береді».

$(A_0, A_1, A_2, A_{1,2})$ – оқиғалардың толық жүйесі. Толық ықтималдық формуласы бойынша:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(A_0)P(E_1 \cap E_2 / A_0) + P(A_1)P(E_1 \cap E_2 / A_1) + P(A_2)P(E_1 \cap E_2 / A_2) + P(A_{1,2})P(E_1 \cap E_2 / A_{1,2})$$

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \cdot 1 = \frac{11}{32} \cdot$$

ә) $$P(A_0 / E_1 \cap E_2) = \frac{P(A_0) + P(E_1 \cap E_2 / A_0)}{P(E_1 \cap E_2)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{11}{32}} = \frac{1}{11},$$

$$P(A_1 \cup A_2 / E_1 \cap E_2) = P(A_1 / E_1 \cap E_2) + P(A_2 / E_1 \cap E_2) = \frac{P(A_1)P(E_1 \cap E_2 / A_1) + P(A_2)P(E_1 \cap E_2 / A_2)}{P(E_1 \cap E_2)} = \frac{20}{33},$$

$$P(A_{1,2} / E_1 \cap E_2) = \frac{P(A_{1,2})P(E_1 \cap E_2 / A_{1,2})}{P(E_1 \cap E_2)} = \frac{\frac{1}{12} \cdot 1}{\frac{11}{33}} = \frac{8}{33}.$$

13.11-мысал: Цехта өнімділігі бірдей 3 түрлі құрылғы бірдей заттар жасап шығарады. Бірінші, екінші және үшінші түрдегі құрылғылардың сапалы зат шығару ықтималдығы сәйкесінше 0,94; 0,9 және 0,85. Жәшікте 10 заттың 5-і бірінші түрдегі құрылғымен, 3-і екінші түрдегі құрылғымен, ал қалған 2-і үшінші түрдегі құрылғымен жасалған. Жәшіктен кез келген бір зат алынды. Алынған заттың сапалы болу ықтималдығын табыңыз.

Шешімі:

а) Егер A оқиғасы өзара үйлесімсіз толық топ құрайтын $B_1, B_2, \ldots, B_n$ болжамдарының (гипотезалар) біреуі орындалғанда орындалса, онда A оқиғасының орындалу

ықтималдығы әр гипотеза ықтималдығының A оқиғасының шартты ықтималдығына көбейтінділерінің қосындысына тең болады:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A), \quad (24.1)$$

және болжамдар ықтималдықтардың толық тобын құрайтындықтан

$$P(B_1)+P(B_2)+\ldots+P(B_n)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)=1.$$

b) A - жәшіктен алынған заттың сапалы болуы.

Онда болжамдар:

B_1 - зат бірінші түрдегі құрылғымен жасалған,

B_2 - зат екінші түрдегі құрылғымен жасалған,

B_3 - зат үшінші түрдегі құрылғымен жасалған деген оқиғалар болсын.

Есеп шарты бойынша:

$$P(B_1)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2},\quad P(B_2)=\frac{3}{10},\quad P(B_3)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}.$$

Егер заттың жекелей бірінші, екінші және үшінші түрдегі құрылғылармен жасалғаны белгілі болса, онда оның сапалы болу ықтималдығы:

$$P_{B_1}(A)=0{,}94,\quad P_{B_2}(A)=0{,}9,\quad P_{B_3}(A)=0{,}85.$$

Толық ықтималдықтың формуласын бойынша жәшіктен алынған заттың сапалы болу ықтималдығы:

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot 0{,}94+\frac{3}{10}\cdot 0{,}9+\frac{1}{5}\cdot 0{,}85=0{,}91.$$

c) Жауабы: $P(A)=0{,}91.$

13.12-мысал: Жоғарыдағы 13.11-мысалында алынған заттың сапалы екені белгілі болсын, яғни $P(A)=0{,}91$. Осы алынған заттың екінші түрдегі құрылғымен жасалу ықтималдығы неге тең, яғни $P_A(B_2)$ неге тең?

Шешімі:

a) А оқиғасы өзара үйлесімсіз толық топ құрайтын $B_1, B_2, \ldots, B_n$ болжамдардың біреуі орындалғанда орындалсын. Егер А оқиғасы орындалса, онда болжамдар ықтималдығы Бейес формуласымен бағаланады:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) P_{B_i}(A)}, \quad i = \overline{1,n}.$$

бұл формуладағы $P(A)$ жоғарғыдағы (13.5.1) формуласымен есептеледі.

b) $P(B_2) = \frac{3}{10}$ - болжамның A оқиғасы орындалғанға дейінгі ықтималдығы, $P_A(B_2)$ шартты ықтималдығы A оқиғасы орындалғаннан кейінгі ықтималдығы.

Байес формуласын қолдансақ:

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i) P_{B_i}(A)} = \frac{\frac{3}{10} \cdot 0{,}9}{0{,}91} \approx 0{,}297.$$

c) Жауабы: $P(A) \approx 0{,}297.$