Тәжірибелік сабақ №12

12. Ықтималдықтың классикалық, статистикалық, геометриялық анықтамалары. Ықтималдық теориясының қосу/ көбейту теоремалары және тым болмағанда бір оқиғаның пайда болу ықтималдығы, олардың қолданыстары.

12.1-мысал:

E - «ойын сүйегін лақтыру»

$A =$«жұп сан түседі»: $A = \{2,4,6\}$.

$B =$«тақ сан түседі»: $B = \{1,3,5\}$.

$C =$«2 немесе 4 түседі»: $C = \{2,4\}$.



$\Omega, \overline{A}, A \cup B, A \cap B$ жиындарын анықтау керек.

Шешімі:

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ - барлық мүмкін нәтижелердің жиыны – мүмкін оқиғалардың қандай да біреуі орындалады - $1,2,3,4,5,6$ сандарының бірі түседі;

$$\overline{A} = \{1,3,5\} = B;$$

$A \cup B$ - жұп немесе тақ сан түседі - $1,2,3,4,5,6$ сандарының бірі түседі: $A \cup B = \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ - барлық мүмкін нәтижелер жиыны;

$A \cap B$ - түскен сан жұп та, тақ та болады: $A \cap B = \emptyset$, мұндағы A, B үйлесімсіз оқиғалар.

12.2-мысал:

Е - «қызыл және көк түсті ойын сүйектерін (текшелерін) тастау»

$A =$ «жұптығы бірдей 2 сан түседі»

B = «қызыл текшеде түскен сан көк текшеде түскен саннан кіші болады»

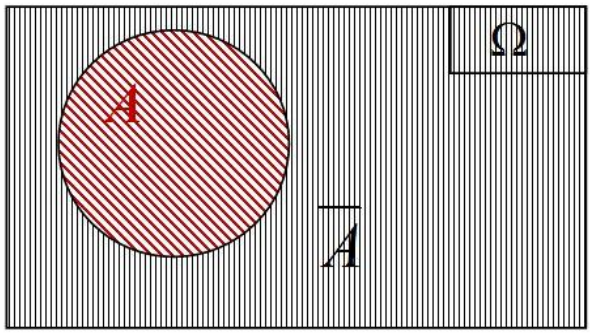


$$\Omega = \{(n,k);\ n,k = 1,2,3,4,5,6\};$$

$$A = \{(2n,2k);\ n,k = 1,2,3,4,5,6\} \cup \{(2n-1,2k-1);\ n,k = 1,2,3,4,5,6\};$$

$$B = \bigcup_{n=1}^{5} \bigcup_{k=1}^{6-n} \{(n,n+k)\}.$$

12.3-мысал: $(A, \overline{A})$ - оқиғалардың толық жүйесі.



12.4-мысал: $p_1,\ldots,p_n$ оң сандары үшін $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ теңдігі орынды болсын.

$$P(\{\omega_i\}) = p_i,\ \{\omega_i\} \subset \Omega,\ i = 1,2,\ldots,n$$

формуласымен берілген P бейнелеуі Ω оқиғалар кеңістігіндегі ықтималдық болады.

12.5-мысал: Ақырлы бос емес Ω кеңістігінде берілген P ықтималдығы *тең ықтималдық* немесе *бірқалыпты ықтималдық* деп аталады, егер элементар оқиғалар бірдей ықтималдықты болса, яғни кез келген элементар $\omega \in \Omega$ үшін

$$\mathrm{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$$

болса.

Тең ықтималдық үлгісінде кез келген A оқиғасы үшін

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathrm{P}(\{\omega\}) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{мүмкін нәтижелер саны}}{\text{барлық нәтижелер саны}}.$$

12.6-мысал: Қорапта 1-ден n-ге дейін белгіленген n шарлар бар. Алынған шар қайтарылмай біртіндеп P шар алынады ($p \le n$). Соңғы шардың нөмірінің алдыңғы $(p-1)$ шардың кез келгенінің нөмірінен артық болуының ықтималдығын табу керек.

Шешімі: Тең ықтималдықты үлгіні қолданамыз.

$A =$«соңғы доптың нөмірі алдыңғы $(p-1)$ шардың кез келгенінің нөмірінен үлкен».

Алынған P шардың құрамы шарлардың нөмірлерімен анықталғандықтан, P шардан тұратын таңдаманы $\{1,\ldots,n\}$ нөмірлер

жиынының қайталамасыз P – тізімі ретінде қарастыруға болады. Олай болса элементар нәтижелердің жиыны Ω ретінде $\{1,...,n\}$ нөмірлер жиынының барлық қайталамасыз P – тізімдер жиынын алуға болады

$$|\Omega| = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

A оқиғасына қолайлы нәтижелер санын анықтау:

- қандай да бір P – комбинациясын аламыз;
- комбинацияның соңына оның ең үлкен санын қою арқылы A оқиғасына қолайлы нәтиже аламыз;
- егер бұл комбинацияның алдыңғы $p-1$ сандарының орналасу ретін өзгертсек, алынған комбинация да A оқиғасына қолайлы нәтиже болады, яғни әрбір $(p-1)$ – алмастыру A оқиғасына қолайлы нәтиже береді;
- $(p-1)$ – алмастырулар саны $(p-1)!$ болғандықтан, әрбір p элементті комбинациядан A оқиғасына қолайлы $(p-1)!$ нәтиже алуға болады;

p элементті комбинациялардың жалпы саны $\binom{n}{p}$ болғандықтан, A оқиғасына қолайлы нәтижелердің жалпы саны $\binom{n}{p}(p-1)!$ санына тең болады, яғни

$$|A| = \binom{n}{p}(p-1)!.$$

Сонымен

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{p}(p-1)!}{\frac{n!}{(n-p)!}} = \frac{1}{p}.$$

12.7-мысал: Қорапта 1-ден n-ге дейін белгіленген n шарлар бар. Қораптан, алынған шар қайтарыла отырып, біртіндеп p шар алынады ($p \le n$). Соңғы шардың нөмірінің алдыңғы $(p-1)$ шардың кез келгенінің нөмірінен артық болуының ықтималдығының шексіздіктегі шегін табыңыз.

Шешімі: Тең ықтималдықты үлгіні қолданамыз.

A_i =«соңғы доптың нөмірі алдыңғы $(p-1)$ шардың кез келгенінің нөмірінен үлкен және i санына тең».

Есептің шарты бойынша алынған шар кері қайтарылатындықтан, яғни таңдамада нөмірдің қайталануы мүмкін болатындықтан, элементар нәтижелердің жиыны Ω ретінде, алдыңғы мысалдағыдан өзгеше, $\{1,...,n\}$ нөмірлер жиынының барлық p – тізімдер жиынын аламыз

$$|\Omega| = n^p.$$

$$|A_i| = (i\text{-}1)^{p-1},$$

$$P(A_i) = \frac{(i\text{-}1)^{p-1}}{n^p},$$

$A = \bigcup_{i=2}^{n} A_i$, $P(A) = \sum_{i=2}^{n} P(A_i)$ себебі A_i оқиғалары өзара үйлесімсіз.

$$P(A) = \sum_{i=2}^{n} \frac{(i\text{-}1)^{p-1}}{n^p} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^{p-1} \frac{1}{n}.$$

$P(A) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^{p-1} \frac{1}{n}$ қосындысы $f(x) = x^{p-1}$ функциясының $[0,1]$ кесіндісіндегі Риманның $\xi_i = \frac{1}{n}$ және $\xi_i = \frac{1}{n}$ таңдамасына сәйкес құрылған $\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ интегралдық қосындысы болады.

Олай болса

$$\lim_{n\to\infty} P(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^{p-1} \frac{1}{n} = \int_0^1 x^{p-1} dx = \frac{1}{p}.$$

Ескерту. Екі жағдайда да бірдей нәтижеге келдік, оның себебі шарлар саны жеткілікті үлкен болғанда, шарларды қайтару мен қайтармаудың айырмашылығы жоқтың қасы болады.

12.8-мысал: Біз бір ойын сүйегін 4 рет тастаймыз және алынған 4 санды олардың пайда болу ретімен белгілейміз.

а) Цифрлары бірдей 4 тізімді алу ықтималдығы қандай?

ә) 4 түрлі цифры бар 4 тізімді алу ықтималдығы қандай?

б) 3 түрлі цифры бар 4 тізімді алу ықтималдығы қандай?

в) 2 түрлі цифры бар 4 тізімді алу ықтималдығы қандай?

Шешімі: Ω – барлық 4 тізімнің жиыны: $|A| = 6^4$.

$$p_1 = \frac{6}{6^4},\ p_2 = \frac{360}{6^4},\ p_3 = \frac{720}{6^4},\ \ p_4 = \frac{210}{6^4}.$$

12.9-мысал: 30 студенттен кем дегенде екі студенттің туған күні бірдей болу ықтималдығы қандай?

Шешімі: Ω – 30 тізімнен тұратын $\{1,...,365\}$ жиыны.

$\overline{A}$ = {Барлық студенттердің туған күндері әртүрлі}

$$P(\overline{A}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot ... \cdot 336}{365^{30}} = \prod_{k=0}^{29}\left(\frac{365-k}{365}\right) = \prod_{k=0}^{29}\left(1-\frac{k}{365}\right) = 0{,}29368;$$

$$P(A) = 0{,}71.$$

12.10-мысал: A_1, A_2, A_3 оқиғалары (Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$, P) ықтималдық кеңістігінде берілсін. $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ есептелуін көрсетіңіз.

Шешімі:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + \\ + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3);$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P((A_1 \cup A_2) \cup A_3) = P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3);$$

$$P((A_1 \cup A_2) \cap A_3) = P((A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \cap A_3)) = \\ = P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P((A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3));$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \mathrm{A}_3) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_3) - \mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2) - \mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_3) - \\ - \mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_3) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_3).$$

12.11-мысал: Бүрге кездейсоқ оңға немесе солға секіре алады. Әрбір секірудің ұзындығы бірдей 1 бірлік. Басында ол О нүктесінде болды. Бүргенің 2n секіруден кейін О нүктесіне түсу ықтималдығы қандай?

Шешімі: Ω – барлық жолдардың жиыны: $|\Omega| = 2^{2n}$;

$2n$ секіруден кейін О нүктесіне жету үшін оңға n секіру керек (және солға n). Бұл секірулердің орындарын оң жақтан таңдауымыз керек.

$$p = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

12.12-мысал: Қорапта 4 ақ, 9 қара және 7 қызыл бірдей шарлар салынған. Қораптан кез келген бір шар алынды. Алынған шардың қара болу ықтималдығын табыңыз.

Шешімі:

a) *А оқиғасының ықтималдығы*

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{мүмкін нәтижелер саны}}{\text{барлық нәтижелер саны}}.$$

b) А – қара шар пайда болу оқиғасы болсын. Барлық нәтижелер саны осы қораптағы шарлар санына тең:

$\omega_i (i = \overline{1,20}) \Rightarrow n = 20$,

ал мүмкін нәтижелер саны қораптағы қара шарлар санына тең:

$m = 9$.

Ықтималдықтың классикалық анықтамасы бойынша:

$$P(A) = \frac{9}{20} = 0{,}45.$$

c) Жауабы: $P(A) = 0{,}45$.

12.13-мысал: $[1;13]$ кесіндісінен сәтіне қарай алынған нүктенің $|x-5| \le 2$ теңсіздігін қанағаттандыру ықтималдығы неге тең?

Шешімі:

a) *Геометриялық ықтималдық бір өлшемді жағдайда*:

$$P(A) = \frac{l}{L},$$

мұндағы l - кіші, L - үлкен ұзындық, $l \subset L$.

b) А – нүктенің $|x-5| \le 2 \Rightarrow -2 \le x-5 \le 2$ теңсіздігін сипаттайтын $[3;7]$ кесіндісіне түсу оқиғасы болсын. Демек $[1;13]$ кесіндісінің ұзындығы $L = 12$ болса, $[3;7]$ кесіндісінің ұзындығы $l = 4$. Онда нүктенің $|x-5| \le 2$ теңсіздігін қанағаттандыру ықтималдығы:

$$P(A) = \frac{l}{L} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

c) Жауабы: $P(A) = \frac{1}{3}$.

12.14-мысал: Институт бақылау жұмыстарының жоспарын үш қаладан алады. Жоспарды бірінші және екінші қаладан алу ықтималдығы сәйкесінше 0,7 және 0,2-ге тең. Жоспарды үшінші қаладан алу ықтималдығын табыңыз.

Шешімі:

a) Өзара үйлесімсіз A_1, A_2, A_3 оқиғалары оқиғалардың толық тобын құрайтын болса, онда
$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$

b) *A, B, C* арқылы институт бақылау жұмыстарының жоспарларын алатын қалаларды белгілейік. Бұл оқиғалар оқиғалардың толық тобын құрайды, сондықтан
P(A)+P(B)+P(C)=1.
Ендеше, ізделінді ықтималдық: P(B)=1-0,7-0,2=0,1.

c) Жауабы: $P(B) = 0{,}1.$

12.15-мысал: Жәшікте 5 ақ, 4 қара және 3 көк шарлар бар. Жәшіктен бір шар алынды. Егер әрбір алынған шар қайта жәшікке салынғаннан кейін ғана, келесі шар алынған болса, алынған бірінші шардың ақ (A), екінші шардың қара (B), үшінші шардың көк болу *(C)* ықтималдығын табыңыз.

Шешімі:

a) Егер $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғалар жинағы бойынша тәуелсіз болса, онда
$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n),$

b) Есеп шарты бойынша A, B, C оқиғалары жинағы бойынша тәуелсіз оқиғалар:
$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{5}{144}.$$

c) Жауабы: $P(ABC) = \frac{5}{144}.$

12.16-мысал: Нысанаға үш оқ атылды. Бірінші оқтың нысанаға тию ықтималдығы - $0{,}6$, екіншісінікі - $0{,}7$, ал үшіншісінікі - $0{,}8$. Тым болмағанда бір оқтың нысанаға тию ықтималдығын табыңыз.

Шешімі:

a) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғаларының тым болмағанда біреуінің пайда болу ықтималдығы:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - \ldots - P(A_{n-1}A_n) +$$
$$+ P(A_1A_2A_3) + \ldots + P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1A_2 \ldots A_n).$$

b) Оқиғалардың белгілеулері: A - бірінші оқ нысанаға тиді, B - екінші оқ нысанаға тиді, C - үшінші оқ нысанаға тиді, ал D - осы үш оқтың тым болмағанда біреуі нысанаға тиді деген оқиға болсын. Онда $D = A + B + C$, мұндағы A, B, C - үйлесімді жинағы бойынша тәуелсіз оқиғалар. Ендеше,

$$P(D) = P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A) \cdot P(B) - P(A) \cdot P(C) - P(B) \cdot P(C) + P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}976.$$

c) Жауабы: $P(D) = 0{,}976.$