Тәжірибелік сабақ №11

11 Фурье қатары. Периодты функциялар. Периодты үрдістер (процестер). Фурьенің тригонометриялық қатары. 2π-периодты функциялардың Фурье қатарына жіктеу. Дирихле теоремасы. Жұп және тақ функцияларды Фурье қатарына жіктеу. Кез келген периодты функцияларды Фурье қатарына жіктеу.

11.1-мысал: $f(x)=\sin x$ функциясы берілген. Периодын анықтаңыз.

Шешімі: Периодтылық анықтамасы бойынша

$$f(x+T)=f(x).$$

Функцияны тексереміз:

$$f(x+\pi)=\sin x$$

Демек,

$$T=2\pi.$$

11.2-мысал: (период өзгерісі)

$$f(x)=\sin 3x$$

Шешімі: $T=\dfrac{2\pi}{3}$.

11.3-мысал: (өмірлік)

Электр тоғы: $I(t)=I_0\sin(\omega t)$

Мағынасы:

I_0 — амплитуда

ω — жиілік

период:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}.$$

11.4-мысал:

$f(x)=x,(-\pi,\pi)$ тақ функциясы берілген. Фурье қатарын құрыңыз.

Шешімі:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nxdx=\left|\begin{array}{l}u=x\\du=dx\\dv=\sin nxdx\\v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{array}\right|=\frac{2}{\pi}\left(\left(-\frac{x}{n}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos\pi n+0\right)+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^n\right)$$

$$b_n=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

1.5-мысал:

$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\-1, & x<0\end{cases}$ тақ функциясы берілген. Функцияның $x=0$ үзіліс нүктесінде қатар қосындысын табыңыз.

Шешімі: $x=0$ - үзіліс нүктесі.

Дирихле бойынша:

$$S(0)=\frac{f(0+)+f(0-)}{2}=\frac{1+(-1)}{2}=0.$$

Қорытынды:

Фурье қатары:

- үзілісте функцияға тең емес
- орташа мәнге тең

11.6-мысал. Периоды 2π болатын, $[-\pi,\pi]$ кесіндісінде мына формуламен берілген $f(x)$ функциясын Фурье қатарына жіктеу керек:

$$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{егер } 0\le x\le\pi,\\ -x, & \text{егер } -\pi\le x<0.\end{cases}$$

Шешімі: 11.1-суретте $f(x)$ функциясының графигі көрсетілген. Бұл функция Дирихле шарттарын қанағаттандырады, демек, ол Фурье қатарына жіктеледі. Қатар коэффициенттерін табамыз:

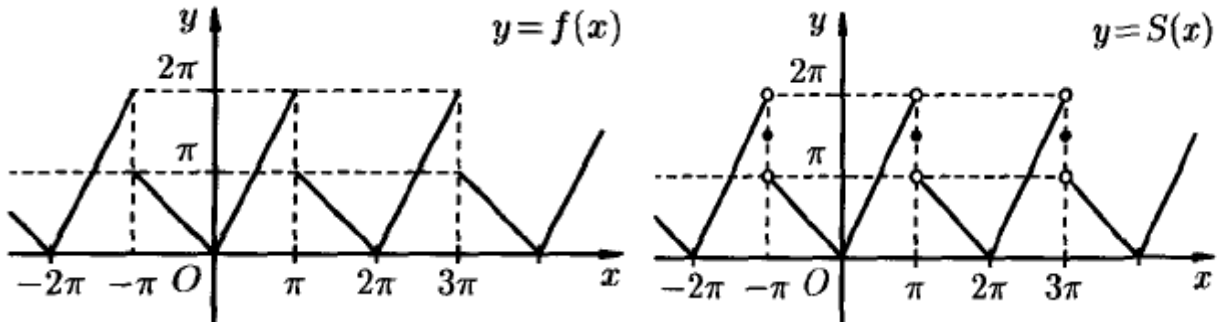
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2xdx=\frac{3\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2x\cos nxdx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=x\\ dv=\cos nxdx\end{matrix}\right|\begin{matrix}du=dx\\ v=\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\left|=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}\right)+\right.$$

$$+\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}+\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right)=-\frac{1}{\pi n^2}(1-\cos\pi n)+\frac{2}{\pi n^2}(\cos\pi n-1)=$$

$$=-\frac{3}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right).$$



11.1-сурет

Сол сияқты табатынымыз:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\ldots=\frac{1}{n}(-1)^{n+1}.$$

$f(x)$ бастапқы функциясына мынадай Фурье қатары сәйкес келеді

$$f(x)\sim S(x)=\frac{3\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{3}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos nx+\frac{1}{n}(-1)^{n+1}\cos nx.$$

$f(x)$ функциясы $[-\pi,\pi]$ кесіндісінің барлық ішкі нүктелерінде үзіліссіз, сондықтан Дирихле теоремасы бойынша осы нүктелердің барлығында $f(x)=S(x)$ теңдігі орын алады, яғни

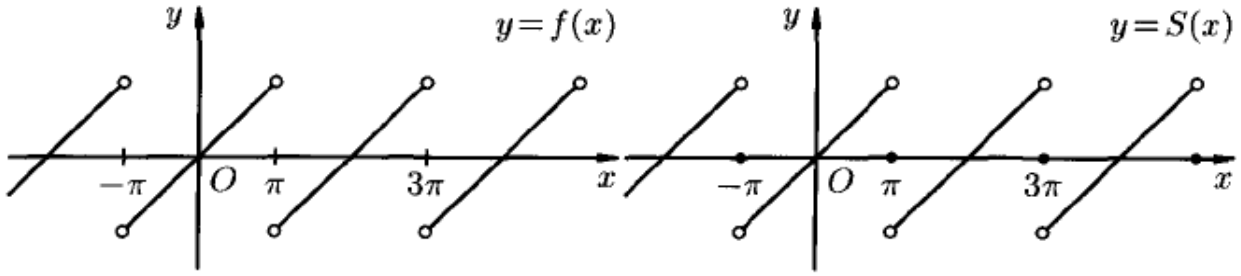
$$f(x)=S(x)=\frac{3\pi}{4}-\frac{6}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)+\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3}-\ldots\right)$$

$x=\pm\pi$ нүктелерінде $S(x)$ қатар қосындысы мынаған тең болады

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{\pi+2\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}.$$

$f(x)$ және $S(x)$ функцияларының графиктері 11.1-суретте көрсетілген.

11.7-мысал: $f(x)=x$, $x\in(-\pi;\pi)$, $T=2\pi$ функциясын Фурье қатарына жіктеу.



11.2-сурет

Шешімі: 11.2-суретте берілген функцияның графигі көрсетілген. $y=x$ функциясы Дирихле шарттарын қанағаттандырады. Бұл функция - тақ. Демек, $a_n=0$, $n=0,1,\ldots$, ал

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\right)\cos nx,$$

яғни $b_n=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\ (n\in N)$. Фурье қатары тек синустардан тұрады:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx=2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots\right).$$

Бұл жағдайда $S(\pm\pi)=\frac{-\pi+\pi}{2}=0$ (11.2-суретті қараңыз).

11.8-мысал: $f(x)=x$ функциясын $(-4;4)$ аралығында Фурье қатарына жіктеу.

Шешімі: Берілген функция тақ, Дирихле шарттарын қанағаттандырады. (11.26) және (11.27) формулалары бойынша, l=4 болғанда:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l},$$

мұндағы

$$b_n = \frac{2}{4}\int_0^4 x \sin \frac{\pi n x}{l}\, dx, \quad n = 1,2,3,....$$

b_n-ді есептейміз:

$$b_n = \frac{1}{2}\left(-x\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^4 + \frac{4}{\pi n}\frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^4 \right) = -\frac{8}{\pi n}\cos \pi n = \frac{8}{\pi n}(-1)^{n+1}, \quad n = 1,2,3,....$$

Онда барлық x үшін $-4<x<4$ аралығындағында

$$x = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{4}}{1} - \frac{\sin\frac{2\pi x}{4}}{2} + \frac{\sin\frac{3\pi x}{4}}{3} - ... \right).$$