Тәжірибелік сабақ №10

10 Функциялық қатар ұғымы, жинақтылық облысы, қосындысы. Дәрежелік қатарлар. Дәрежелік қатардың жинақтылығы. Дәрежелік қатардың жинақтылық радиусы және интервалы. Кейбір қарапайым (элементар) функциялардың Тейлор (Маклорен) қатарына жіктелінуі.

10.1-мысал: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

Шешімі: Берілген

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^{3.} + \ldots + x^n + \ldots$$

қатары еселігі $q = x$ болатын геометриялық қатар. Демек, бұл қатар $|x| < 1$ болса жинақты, яғни $x \in (-1;1)$ және қосындысы

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

10.2-мысал. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$ функциялық қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Берілген қатардың абсолюттік шамасынан қатар құрайық:

$$\left|\frac{\sin x}{1^2}\right| + \left|\frac{\sin 2^2 x}{2^2}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| + \ldots$$

Кез келген $x \in R$ үшін

$$\left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2},$$

ал жалпы мүшесі $\frac{1}{n^2}$ болатын $(\lambda = 2 > 1)$ жалпы гармониялық қатар жинақты. Үлкен қатардың жинақтылығынан кіші қатардың жинақтылығы алынады. Онда берілген қатар барлық $x \in R = (-\infty; +\infty)$ үшін абсолютті жинақты болады.

10.3-мысал.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{егер } x\neq 0,\\ 0, & \text{егер } x=0 \end{cases}$$

функциясының $x=0$ нүктесінде кез келген ретті туындысы бар, сондай-ақ кез келген n үшін $f^{(n)}(0)=0$. Онда $f(x)$ функциясының Маклорен қатары

$$0+\frac{0}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\ldots+\frac{0}{n!}x^n+\ldots$$

кез келген x нүктесінде жинақты және $0+\frac{0}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\ldots+\frac{0}{n!}x^n+\ldots=0$, яғни кез келген $x\neq 0$ үшін $0+\frac{0}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\ldots+\frac{0}{n!}x^n+\ldots\neq f(x)$.

10.4-мысал: $y=5^x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^4 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

Шешімі.

a) Маклорен формуласын пайдаланамыз:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

b) $y=5^x$ функциясының $x_0=0$ нүктесіндегі туындыларын табамыз:

$y'=(5^x)'=5^x\ln 5,$ $y'(0)=\ln 5;$

$y''=(5^x\ln 5)'=5^x\ln^2 5,$ $y''(0)=\ln^2 5;$

$y'''=(5^x\ln^2 5)'=5^x\ln^3 5,$ $y'''(0)=\ln^3 5;$

$y^{IV}=(5^x\ln^3 5)'=5^x\ln^4 5,$ $y^{IV}(0)=\ln^4 5.$

Маклорен қатарын жазамыз:

$$5^x=1+x\ln 5+\frac{x^2\ln^2 5}{2!}+\frac{x^3\ln^3 5}{3!}+\frac{x^4\ln^4 5}{4!}+\ldots$$

x^4 алдындағы коэффициент $\frac{\ln^4 5}{4!}=\frac{\ln^4 5}{24}$ болады.

c) Жауабы: $\frac{\ln^4 5}{24}$.

10.5-мысал: $y=x\sin 5x$ функциясын Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

Шешімі.

a) Маклорен формуласын пайдаланамыз:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

b) $y=x\sin 5x$ функциясының $x_0=0$ нүктесіндегі туындыларын табамыз:

$$y'=(x\sin 5x)'=\sin 5x+5x\cos 5x,\ \ y'(0)=0;$$

$$y''=(\sin 5x+5x\cos 5x)'=5\cos 5x+5\cos 5x-25x\sin 5x,\ y''(0)=10;$$

$$y'''=(10\cos 5x-25x\sin 5x)'=-50\sin 5x-25\sin 5x-125x\cos 5x,$$

$$y'''(0)=0.$$

Маклорен қатарын жазамыз:

$$x\sin 5x=0+0+\frac{10x^2}{2!}+\frac{0}{3!}x^3+\ldots.$$

x^3 алдындағы коэффициент $\frac{0}{3!}=0$ болады.

c) Жауабы: 0.