Тәжірибелік сабақ №9

9. Таңбасы ауыспалы қатарлар. Таңбасы алма-кезек ауыспалы қатарлар. Лейбниц белгісі. Таңбасы ауыспалы қатарлардың жинақтылығының жалпы жеткілікті белгісі. Сандық қатарлардың абсолютті және шартты жинақтылығы. Абсолютті жинақты қатарлардың негізгі қасиеттері

9.1-мысал.

$$-a_1-a_2+a_3+a_4+a_5-a_6-a_7+\ldots$$

түрінде берілген қатар.

9.2-мысал: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$$

таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар.

Лейбниц белгісінің шарттарын тексерейік:

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

Лейбниц белгісі бойынша жинақты. Мүшелерінің абсолюттік шамасынан құралған қатар

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармониялық қатар жинақсыз.

Демек, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ қатары шартты жинақты.

9.3-мысал: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}+\ldots$$

таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар.
Лейбниц белгісінің шарттарын тексерейік:

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{6} > \ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0.$

Лейбниц белгісі бойынша жинақты. Мүшелерінің абсолюттік шамасынан құралған

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

қатарын зерттейік.

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!(n+1)}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Бұдан $D = 0 < 1,$ демек қатар Даламбер белгісі бойынша жинақты.

Демек, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$ қатары абсолютті жинақты.

9.4-мысал: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

шартты жинақты. Оның қосындысы S болсын. Оның мүшелерін бір оң мүшесі екі теріс мүшелерінің орналасуы арқылы орналастырсақ:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\right)}_{S} = \frac{1}{2}S.$$

Енді қатар қосындысы $\frac{1}{2}S$.