Тәжірибелік сабақ №8

8. Сандық қатар, жинақтылығы және қосындысы. Геометриялық қатар. Сандық қатардың жинақтылығының қажетті шарты. Оң қатарлардың жинақтылық белгілері. Даламбер белгісі. Коши радикалдық белгісі. Кошидің интегралдық белгісі

8.1-мысал: Қатар алғашқы мүшелерімен $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{9}{4}+\frac{16}{5}+\ldots$ мүшелерімен берілген. Қатардың жалпы мүшесін жазыңыз.

Шешімі: Қатардың мүшелерін олардың нөмірлерімен байланыстырсақ:

$$a_1=\frac{1^2}{1+1},\ a_2=\frac{2^2}{2+1},\ a_3=\frac{3^2}{3+1},\ a_4=\frac{4^2}{4+1}\ \Rightarrow a_n=\frac{n^2}{n+1},\ n\in N$$

екені шығады. a_n белгілі, яғни қатар берілген.

8.2-мысал: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ қатарының қосындысын табу керек.

Шешімі:

a) қатардың қосындысын табу үшін оның $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ дербес қосындысының шегін қарастырамыз.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\ldots$

қатарының S_n дербес қосындысы:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Демек, $S_n=1-\frac{1}{n+1}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$ берілген қатар жинақты және қатардың қосындысы $S=1$.

c) Жауабы: $S=1$.

8.3-мысал: $1+1+1+...+1+...$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.
Шешімі:
n – дербес қосындысы:

$$S_n = \underbrace{1+1+1+...+1}_{n} = n.$$

Бұдан

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

қатар жинақсыз және оның қосындысы болмайды.

8.4-мысал: $1-1+1-1+1-1+...$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.
Шешімі:
n – дербес қосындысы:

$$S_n = \begin{cases} 1, & \text{егер } n - \text{ тақ} \\ 0, & \text{егер } n - \text{ жұп} \end{cases}$$

Бұдан

$\lim_{n\to\infty} S_n$ шегі жоқ.

Берілген қатар жинақсыз.

8.5-мысал: $2^3 + 2^2 + 2 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-3}} + ...$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.
Шешімі: берілген қатарды

$$2^3 \cdot 1 + 2^3 \cdot \frac{1}{2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^2} + ... + 2^3 \cdot \frac{1}{2^n} + ...$$

түрінде жазуға болады. Олай болса қатар

$a = 2^3$ және $q = \frac{1}{2}$

болатын геометриялық қатарын береді. Бұл қатар

$$|q| = \frac{1}{2} < 1$$

болғандықтан жинақты және $2^3 + 2^2 + 2 + \frac{1}{2} + ... = \frac{2^3}{1-\frac{1}{2}} = 2^4.$

Ескерту: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...=1.$

8.6-мысал: Гармоникалық қатарды жинақтылыққа зеттеңіз:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$$

Шешімі: Бұл арада $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Қатарды жинақтылыққа зерттейік, яғни $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ шегін қарастырайық:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

тізбегінің өспелі және $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e$ екені белгілі. Онда кез келген $n\in N$ үшін $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$ теңсіздігі орындалады. e негізінде теңсіздікті логарифмдесек:

$$n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1\Rightarrow\frac{1}{n}>\ln\frac{n+1}{n}\Rightarrow\frac{1}{n}>\ln(n+1)-\ln n. \quad (8.4)$$

Қатардың n - ші дербес қосындысын қарастырайық:

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}>|(4)|>(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+(\ln 4-\ln 3)+...$$

$$...+(\ln n-\ln(n-1))+(\ln(n+1)-\ln n)=\ln(n+1)$$

$$S_n>\ln(n+1)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n\geq\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n\geq+\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty\Rightarrow$$

$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - жинақсыз.

Сонымен $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ үшін $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, бірақ қатар жинақсыз.

8.7-мысал: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n+5}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n+5}=3\neq 0$ болғандықтан $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n+5}$ қатары жинақсыз, яғни қатардың жинақсыздығының жеткілікті шарты орындалады.

8.8-мысал: $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\ldots$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0$ болғандықтан қатар жинақсыз.

8.9-мысал:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - жинақты қатар: $\lambda=2>1.$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - жинақсыз гармоникалық қатар: $\lambda=1.$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ - жинақсыз қатар: $\lambda=\frac{1}{2}<1.$

8.10-мысал: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+2^n}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: берілген қатарды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ жинақты $\left(|q|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1\right)$ геометриялық қатарымен салыстырайық:

$a_n=\frac{\sqrt{1+\cos^2 n}}{n},$

$\frac{1}{3+2^n}<\frac{1}{2^n}.$

Бұдан берілген қатар *I - салыстыру белгісі* бойынша жинақты.

8.11-мысал: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1+\cos^2 n}}{n}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Жалпы мүшесі $a_n=\frac{\sqrt{1+\cos^2 n}}{n}.$

Салыстыру мақсатында $b_n=\frac{1}{n}$ жинақсыз гармониялық қатарын қарастырайық:

$\frac{\sqrt{1+\cos^2 n}}{n}>\frac{1}{n}.$

Бұдан берілген қатар *I* - *салыстыру белгісі* бойынша жинақсыз.

ерілген қатарды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ жинақты $\left(|q|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1\right)$ геометриялық қатарымен салыстырайық:

$$\frac{1}{3+2^n}<\frac{1}{2^n}.$$

Бұдан берілген қатар *I* - *салыстыру белгісі* бойынша жинақты.

8.12-мысал: $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{5n}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Шектік салыстыру белгісін қолданамыз:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{5n}}{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{5}\neq 0.$$

II -салыстыру белгісі *бойынша*

$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{5n}$ және $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

қатарларының екеуі де жинақты немесе екеуі де жинақсыз. Олай болса гармониялық қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

жинақсыз болғандықтан

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{5n}$$

қатары да жинақсыз.

8.13-мысал: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Даламбер белгісін қолданамыз:

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

$D=0<1$. Олай болса аталған белгі бойынша қатар жинақты.

8.14-мысал: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Даламбер белгісін қолданамыз:

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3\cdot n^2}{3^n\cdot(n+1)^2}=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2=3.$$

$D=3>1$ болғандықтан, аталған белгі бойынша қатар жинақсыз.

8.15-мысал: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Қатардың жалпы мүшесі белгілі өрнектің n дәрежесі, сондықтан Кошидің радикалдық белгісін қолдану ыңғайлы:

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+1}=\frac{1}{3}<1.$$

Сонымен $K<1$, олай болса қатар жинақты.

8.16-мысал: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Кошидің радикалдық белгісін қолданамыз

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1.$$

Сонымен, $K=e>1$ болса берілген қатар жинақсыз.

8.17-мысал: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Кошидің интегралдық белгісін қолданамыз.

$f(n)=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ болғандықтан, $f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$ болады.

Бұл функция $[1,+\infty)$ аралығында үзіліссіз және кемімелі.

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[\ln\ln(b+1)-\ln\ln 2\right]=\infty.$$

Дәйексіз интеграл *жинақсыз*, онда берілген қатар да *жинақсыз*.

8.18-мысал: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Кошидің интегралдық белгісін қолданамыз.

$f(n)=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$ болғандықтан, $f(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}$ болады.

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+1}}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{(x+1)^{3/2}}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b(x+1)^{3/2}d(x+1)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right|_1^b=-2\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right|_1^b=-2\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{b+1}}-\frac{1}{\sqrt{1+1}}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

Дәйексіз интеграл жинақты, онда берілген қатар да жинақты.