Тәжірибелік сабақ №7

7 Тұрақты коэффициентті екінші ретті біртекті және біртексіз сызықтық дифференциалдық теңдеулер

7.1-мысал: Берілген функцияларды сызықтық тәуелсіздікке тексеріңіз.

1) $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$;

Шешімі: $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x}$.

а) Егер $k_1 - k_2 = 0$, яғни $k_1 = k_2$ болса, онда

$e^{(k_1 - k_2)x} = e^{(k_1 - k_1)x} = e^0 = 1 \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = 1$ - тұрақты

$\overset{1)}{\Rightarrow} y_1, y_2$ сызықтық тәуелді.

б) Егер $k_1 - k_2 \neq 0$, яғни $k_1 \neq k_2$ болса, онда

$e^{(k_1 - k_2)x} = u(x) \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = u(x)$ - тұрақты емес

$\overset{2)}{\Rightarrow} y_1, y_2$ сызықтық тәуелсіз.

2) $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$;

Шешімі: $y_2 = xe^{kx} = x \cdot y_1 = u(x) \cdot y_1$,

мұндағы $u(x) = x$ - тұрақты емес $\overset{2)}{\Rightarrow}$ кез келген k үшін y_1, y_2 сызықтық тәуелсіз.

3) $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$,

мұндағы α, β - тұрақты сандар және $\beta \neq 0$;

Шешімі:

$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} = ctg\beta x = u(x)$.

$u(x)$ функциясы, $\beta \neq 0$ болғандықтан, тұрақты емес

$\overset{2)}{\Rightarrow} y_1, y_2$ сызықтық тәуелсіз.

7.2-мысал: $y''-2y'-8y=0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешімі: Сипаттамалық теңдеуді жазамыз:

$$k^2-2k-8=0$$

$$D=p^2-4q=(-2)^2-4(-8)=36>0$$ - *I жағдай*

k_1, k_2 түбірлерін табамыз:

$$k_1=\frac{-p-\sqrt{D}}{2}=\frac{2-6}{2}=-2,$$

$$k_2=\frac{-p+\sqrt{D}}{2}=\frac{2+6}{2}=4.$$

Жалпы шешімін жазамыз:

$$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{4x}.$$

7.3-мысал: $y''-6y'+9y=0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешімі: Сипаттамалық теңдеуді жазамыз:

$$k^2-6k+9=0$$

$$D=p^2-4q=(-6)^2-4\cdot 9=0$$ - *II жағдай*

нақты бірдей түбірлері бар:

$$k_{1,2}=-\frac{p}{2}=3.$$

Жалпы шешімін жазамыз:

$$y=(c_1+c_2x)e^{3x}.$$

7.4-мысал: $y''-6y'+13y=0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешімі: Сипаттамалық теңдеуді жазамыз:

$$k^2-6k+13=0$$

$$D=p^2-4q=(-6)^2-4\cdot 13=-16<0$$ - *III жағдай*

а) $$\alpha=-\frac{p}{2}=-\frac{-6}{2}=3,\quad \beta=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}=\sqrt{13-\frac{36}{4}}=2$$

немесе

б) $$D=-16=(-1)\cdot 16=16i^2\Rightarrow \sqrt{D}=\pm 4i$$

$$k_1 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2} = \frac{6-4i}{2} = 3-2i,$$

$$k_2 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2} = \frac{6+4i}{2} = 3+2i.$$

Жалпы шешімін жазамыз:

$$y = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x\right) \Rightarrow y = e^{3x}\left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\right).$$

7.5-мысал: $y'' - 6y' + 9y = 0$ теңдеуінің $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ шарттарын қанағаттандыратын шешімін табу керек.

Шешімі: Берілген теңдеудің жалпы шешімі (7.3-мысал):

$$y = \left(c_1 + c_2 x\right)e^{3x}$$

Берілген шарттарды қанағаттандыратын дербес шешімді табамыз:

$$y = \left(c_1 + c_2 x\right)e^{3x} \Rightarrow 0 = c_1$$

$$y' = c_2 e^{3x} + 3\left(c_1 + c_2 x\right)e^{3x} \Rightarrow 1 = c_2 + 3c_1 \Rightarrow c_2 = 1$$

Сонымен $y = xe^{3x}$ - берілген теңдеудің дербес шешімі.

7.6-мысал: Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y'' - y' - 2y = 2e^{3x}$.

Шешімі:

а) $y'' - y' - 2y = 0$ біртекті теңдеуінің сипаттамалық теңдеуі $k^2 - k - 2 = 0,$ мұндағы $p = -1,\ q = -2.$

Оның дискриминанты

$$D = p^2 - 4q = (-1)^2 - 4\cdot(-2) = 9 > 0.$$

7.6.1-кестесі бойынша I - жағдай.

Сипаттамалық теңдеудің түбірлері

$$k_1 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2} = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1,$$

$$k_2 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2} = \frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2.$$

Демек, біртекті теңдеудің жалпы шешімі

$$\bar{y} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}.$$

b) Біртексіз теңдеудің дербес шешімін

$\tilde{y} = Ae^{3x}$

түрінде іздейміз, себебі теңдеудің оң жағындағы $f(x) = 2e^{3x}$ функциясында $\alpha = 3$ сипаттамалық теңдеудің түбірі емес, яғни $\alpha \neq k_1, \alpha \neq k_2$.

$\tilde{y} = Ae^{3x}$ біртексіз теңдеудің дербес шешімін және оның бірінші, екінші ретті туындыларын

$\tilde{y}' = 3Ae^{3x}$,

$\tilde{y}'' = 9Ae^{3x}$

берілген $y'' - y' - 2y = 2e^{3x}$ теңдеуіне қоямыз:

$9Ae^{3x} - 3Ae^{3x} - 2Ae^{3x} = 2e^{3x}$.

Бұдан $4A = 2,\ A = \frac{1}{2}$, онда біртексіз теңдеудің дербес шешімі

$\tilde{y} = \frac{1}{2}e^{3x}$.

Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі:

$y = \bar{y} + \tilde{y} = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}$.

c) Жауабы: $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}$.

7.7-мысал: Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y'' - 10y' + 25y = 3e^{x}$.

Шешімі:

a) $y'' - 10y' + 25y = 0$ біртекті теңдеуінің сипаттамалық теңдеуі $k^2 - 10k + 25 = 0$ мұндағы $p = -10,\ q = 25$.

Оның дискриминанты

$D = p^2 - 4q = (-10)^2 - 4 \cdot 25 = 0$.

Кесте 14.1 бойынша II - жағдай.

Сипаттамалық теңдеудің түбірлері

$k_1 = k_2 = -\frac{p}{2} = -\frac{-10}{2} = 5$.

Демек, біртекті теңдеудің жалпы шешімі

$y = (c_1 + xc_2)e^{5x}$.

b) Біртексіз теңдеудің дербес шешімін

$\tilde{y} = Ae^x$

түрінде іздейміз, себебі теңдеудің оң жағындағы $f(x) = 3e^x$ функциясында $\alpha = 1$ сипаттамалық теңдеудің түбірі емес, яғни $\alpha \neq k_1, \alpha \neq k_2$.

$\tilde{y} = Ae^x$ біртексіз теңдеудің дербес шешімін және оның бірінші, екінші ретті туындыларын

$\tilde{y}' = Ae^x$,

$\tilde{y}'' = Ae^x$

берілген $y'' - 10y' + 25y = 3e^x$ теңдеуіне қоямыз:

$Ae^x - 10Ae^x + 25Ae^x = 3e^x$

Бұдан $16A = 2$, $A = \frac{1}{8}$, онда біртексіз теңдеудің дербес шешімі

$\tilde{y} = \frac{1}{8}e^x$.

Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі:

$y = \bar{y} + \tilde{y} = (c_1 + xc_2)e^{5x} + \frac{1}{8}e^x$.

c) Жауабы: $y = (c_1 + xc_2)e^{5x} + \frac{1}{8}e^x$.

7.8-мысал: Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y'' + 6y' + 25y = 4e^{-2x}$.

Шешімі:

a) $y'' + 6y' + 25y = 0$ біртекті теңдеуінің сипаттамалық теңдеуі $k^2 + 6k + 25 = 0$ мұндағы $p = 6,\ q = 25$.

Оның дискриминанты

$D = p^2 - 4q = 6^2 - 4 \cdot 25 = -64 = 64i^2$.

Кесте 14.1 бойынша III - жағдай.

Сипаттамалық теңдеудің түбірлері

$$k_1 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2} = \frac{-6-\sqrt{64i^2}}{2} = \frac{-6-8i}{2} = -3-4i,$$

$$k_2 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2} = \frac{-6+\sqrt{64i^2}}{2} = \frac{-6+8i}{2} = -3+4i.$$

Демек, біртекті теңдеудің жалпы шешімі

$y = e^{-3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x).$

b) Біртексіз теңдеудің дербес шешімін

$\tilde{y} = Ae^{-2x}$

түрінде іздейміз, себебі теңдеудің оң жағындағы $f(x) = 4e^{-2x}$ функциясында $\alpha = -2$ сипаттамалық теңдеудің түбірі емес, яғни $\alpha \neq k_1, \alpha \neq k_2$.

$\tilde{y} = Ae^{-2x}$ біртексіз теңдеудің дербес шешімін және оның бірінші, екінші ретті туындыларын

$\tilde{y}' = -2Ae^{-2x},$

$\tilde{y}'' = 4Ae^{-2x}$

берілген $y'' + 6y' + 25y = 4e^{-2x}$ теңдеуіне қоямыз:

$4Ae^{-2x} - 12Ae^{-2x} + 25Ae^{-2x} = 4e^{-2x}.$

Бұдан $17A = 4, A = \frac{4}{17}$, онда біртексіз теңдеудің дербес шешімі

$\tilde{y} = \frac{4}{17}e^{-2x}.$

Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = e^{-3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x) + \frac{4}{17}e^{-2x}.$$

c) Жауабы: $y = e^{-3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x) + \frac{4}{17}e^{-2x}.$