Тәжірибелік сабақ №6

6 Жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер. Кейбір реті төмендетілетін дифференциалдық теңдеулер

6.1-мысал: $y^{IV} = \cos^2 x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешімі: теңдеудің екі бөлігін dx-ке көбейтіп интегралдайық:

$$y''' = \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1+cos2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) + c_1,$$

$$y'' = \int \left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) + c_1 \right) dx = \frac{x^2}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + c_1 x + c_2,$$

$$y' = \int \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + c_1 x + c_2 \right) dx = \frac{x^3}{12} - \frac{\sin 2x}{16} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3,$$

$$y = \int \left(\frac{x^3}{12} - \frac{\sin 2x}{16} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \right) dx = \frac{x^4}{48} + \frac{\cos 2x}{32} + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4.$$

Жауабы: $y = \frac{x^4}{48} + \frac{\cos 2x}{32} + \frac{c_1 x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4$ ізделінді жалпы шешімі.

6.2-мысал: $\left(1+x^2\right)y'' + 2xy' = 12x^3$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешімі: $y' = z,\ y'' = z'$ ауыстыруын енгізсек:

$$\left(1+x^2\right)z' + 2xz = 12x^3$$

$$z' + \frac{2x}{1+x^2} z = \frac{12x^3}{1+x^2},$$

яғни, бұл сызықтық біртексіз бірінші ретті дифференциалдық теңдеу болады, оны еркін тұрақтыны вариациалау әдісін қолданып шешеміз.

Алдымен біртекті теңдеуді қарастырайық:

$z' + \frac{2x}{x^2+1} z = 0$ -айнымалысы ажыратылатын теңдеу:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2x}{x^2+1} z$$

$$\frac{dz}{z} = -\frac{2xdx}{x^2+1}$$

$$\int \frac{dz}{z} = -2\int \frac{xdx}{x^2+1}$$

$$\int \frac{dz}{z} = -\frac{2}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$$

$$\ln|z| = \ln|c| - \ln|x^2+1|$$

$$z = \pm\frac{c}{x^2+1}$$

Еркін тұрақтыны $c = c(x)$ түрінде вариациалаймыз:

$$z = \pm\frac{c(x)}{x^2+1} \Rightarrow z' = \pm\frac{c'(x)\left(x^2+1\right) - 2xc(x)}{\left(x^2+1\right)^2},$$

Біртексіз дифференциалдық теңдеуге z, z' қойылса, онда

$$\pm\frac{c'(x)}{x^2+1} \mp \frac{2xc(x)}{x^2+1} \pm \frac{2xc(x)}{x^2+1} = \frac{12x^3}{1+x^2}$$

$$\pm c'(x) = 12x^3$$

$$c'(x) = \pm 12x^3$$

$$c(x) = \pm\frac{12x^4}{4} + c_1$$

$$c(x) = \pm 3x^4 + c_1$$

$$z = \pm\frac{c_1 \pm 3x^4}{x^2}$$

$$y^1 = \pm\frac{c_1 \pm 3x^4}{x^2+1}$$

$$y = \pm\int \frac{c_1}{x^2+1}dx \pm 3\int \frac{x^4 dx}{x^2+1} + c_2$$

$\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$ интегралын есептейміз ол үшін оның бүтін бөлігін

бөліп аламыз:

$$\frac{x^4}{x^2+1}=\frac{x^4-1+1}{x^2+1}=x^2-1+\frac{1}{x^2+1},$$

$$\int\frac{x^4}{x^2+1}dx=\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{x^3}{3}-x+arctgx.$$

Демек,

$$y=\pm\left(C_1 arctgx+x^3-3x+3arctgx\right)+C_2\Rightarrow y=C_2\pm\left[(C_1+3)arctgx+x^3-3x\right]$$

Жауабы: $y=C_2\pm\left[\ x^3-3x+(C_1+3)arctgx\right]$

6.3-мысал: $y''y^3+1=0,\ y(1)=-1,\ y'(1)=-1$ Коши есебінің шешімін табыңыз.

Шешімі: $y'=z,\ \ y''=zz'$ ауыстыруын берілген теңдікке қойсақ:

$$zz'y^3+1=0$$

$$zz'y^3=-1$$

$$z\frac{dz}{dy}=-\frac{1}{y^3}$$

$$zdz=-\frac{dy}{y^3}$$

$$\int zdz=-\int y^{-3}dy$$

$$\frac{z^2}{2}=-\frac{y^{-2}}{-2}+c_1$$

$$z^2=\frac{1}{y^2}+c_1$$

$$z=y'$$

$$\left(y'\right)^2=\frac{1}{y^2}+c_1$$

$y'(1)=-1,\ \ y(1)=-1$ бастапқы шарттарын қолданып c_1 тұрақтысын табамыз:

$$(-1)^2=\frac{1}{(-1)^2}+C_1\Rightarrow 1=1+C_1\Rightarrow C_1=0.$$

$(y')^2 = \frac{1}{y^2} \Rightarrow y' = \pm\frac{1}{y}$ айнымалысы ажыратылатын бірінші ретті дифференциалдық теңдеу:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{y} \Rightarrow ydy = \pm dx \Rightarrow \int ydy = \pm\int dx + c_2 \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \pm x + c_2 .$$

Енді c_2 тұрақтысын табамыз:

$$y(1) = -1 \Rightarrow \frac{(-1)^2}{2} = \pm 1 + c_2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \pm 1 + c_2 = \begin{cases} (c_2)_1 = \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow (c_1)_1 = -\frac{1}{2} \\ (c_2)_2 = \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow (c_1)_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Жауабы: $\frac{y^2}{2} = -\frac{1}{2} \pm x$ және $\frac{y^2}{2} = \frac{3}{2} \pm x$ Коши есебінің шешімі.