Тәжірибелік сабақ №4

5. Сызықтық бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер. Бернулли теңдеуі. Толық дифференциалды теңдеулер. Толық дифференциалық теңдеулерге келтірілетін теңдеулер

5.1-мысал: $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}$ дифференциалдық теңдеуін Бернулли ауыстыруы көмегімен шешіңіз.

Шешімі: Есептің шарты бойынша

$$P(x) = -\frac{1}{x}, \quad Q(x) = -\frac{2}{x^2}$$

$y = uv$

$y' = u'v + uv'$ Бернулли ауыстыруын берілген теңдеуге қойсақ:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = -\frac{2}{x^2}.$$

Теңдеуде u көбейткішін екінші және үшінші қосылғышты жақша алдына шығарсақ

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = -\frac{2}{x^2}$$

Екі айнымалары ажыратылатын теңдеулерге келтіреміз:

$$\begin{cases} v' - \frac{v}{x} = 0 \quad (a) \\ u'v = -\frac{2}{x^2} \quad (б) \end{cases}$$

Алдымен $a)$ айнымалысы ажыратылатын теңдеуін шешіп v шешімін табамыз:

$$a) \Rightarrow v' = \frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|v| = \ln|x| \Rightarrow v = x.$$

Табылған $v = x$ шешімін $б)$ теңдеуіне қойып Бернулли ауыстыруындағы u шешімін аламыз:

$$б) \Rightarrow u'x = -\frac{2}{x^2}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{2}{x^3}$$

$$du = -\frac{2}{x^3}dx$$

$$u = -2\int x^{-3}dx = -2\frac{x^{-2}}{-2} + c$$

$$u = x^{-2} + c = \frac{1}{x^2} + c$$

$$u = \frac{1}{x^2} + c.$$

Бернулли ауыстыруы бойынша сызықтық теңдеудің жалпы шешімі $y = uv$ болғандықтан

$y = \left(\frac{1}{x^2} + c\right)x$ - жалпы шешімі.

5.2-мысал: $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}$ дифференциалдық теңдеуін еркін тұрақтыны вариациалауды қолдану шешіңіз.

Шешімі:

1) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}$

біртексіз сызықтық теңдеуін

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

біртекті теңдеу түріне келтіріп, біртекті теңдеудің жалпы шешімін табамыз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$xdy = ydx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$y = xc$$

2) Біртекті теңдеудің $y = xc$ жалпы шешіміндегі c тұрақтысын $c = c(x)$ функциясымен алмастырсақ және туындысын тапсақ:

$$y = c(x)x$$

$$y' = c'(x)x + c(x).$$

Берілген біртексіз сызықтық теңдеуге y және y' қойылса $c(x)$ табылады:

$$c'(x)x + c(x) - \frac{c(x)x}{x} = -\frac{2}{x^2}$$

$$c'(x)x = -\frac{2}{x^2}$$

$$c'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

$$c(x) = -2\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{2x^{-2}}{-2} + c_1 = x^{-2} + c_1 = \frac{1}{x^2} + c_1$$

$$c(x) = \frac{1}{x^2} + c_1.$$

3) $y = c(x)x$ біртекті теңдеудің шешіміне табылған $c(x)$ қойылып біртексіз сызықтық теңдеудің жалпы шешімін табамыз:

$$y = x\left(\frac{1}{x^2} + c_1\right).$$

5.3-мысал: $xy' + y = xy^2$ Бернулли теңдеуін шешіңіз.

Шешімі:

$xy' + y = xy^2$ теңдеуінің екі жағын x-ке бөліп

$$\frac{xy'}{x}+\frac{y}{x}=\frac{xy^2}{x}$$

$$y'+\frac{y}{x}=y^2,$$

мұндағы $P(x)=\frac{1}{x},\ \ Q(x)=1,\ n=2$ Бернулли теңдеуі екенін біліп, теңдеуінің екі жағын y^2 -не бөлсек

$$\frac{y'}{y^2}+\frac{y}{xy^2}=\frac{y^2}{y^2},$$

оны теріс дәрежесімен алып жазсақ:

$$y'y^{-2}+\frac{1}{x}y^{-1}=1$$

теңдеуіне келеміз, теңдеуде

$$z=y^{-1}$$

белгілеуін енгізіп, оның туындысын тапсақ:

$$z=(-1)y^{-2}y'.$$

Теңдеуден

$$y^{-2}y'=-z$$

табылып, $z=y^{-1}$ белгілеуі екеуін $y'y^{-2}+\frac{1}{x}y^{-1}=1$ теңдеуіне қойсақ:

$$-z'+\frac{1}{x}z=1.$$

Теңдеудің екі бөлігін де (-1)-ге көбейтейік

$$z'-\frac{z}{x}=-1$$

түріндегі z және оның z' туындысына қатысты біртексіз сызықтық теңдеу алынады.

Бұл теңдеуді жоғарғыда көрсетілгендей Бернулли ауыстыруы көмегімен

$$y = uv$$

$$y' = u'v + uv'$$

Бернулли ауыстыруын берілген теңдеуге қойсақ:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = -1$$

Теңдеуде u көбейткішін екінші және үшінші қосылғышта жақша алдына шығарсақ

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = -1$$

Екі айнымалары ажыратылатын теңдеулерге келтіреміз:

$$\begin{cases} v' - \frac{v}{x} = 0 \quad (a) \\ u'v = \text{-}1 \qquad (б) \end{cases}$$

Алдымен $а)$ айнымалысы ажыратылатын теңдеуін шешіп v шешімін табамыз:

$$(a) \Rightarrow v' = \frac{v}{x}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{\mathrm{dx}}{x}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = \ln|x|$$

$$v = x.$$

Табылған $v = x$ шешімін $б)$ теңдеуіне қойып Бернулли ауыстыруындағы u шешімін аламыз:

$$(б) \Rightarrow u'v = -1$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}$$

$$du = -\frac{dx}{x}$$

$$\int du = -\int \frac{dx}{x}$$

$$u = -\ln x + c$$

$$u = c - \ln x.$$

Бернулли ауыстыруы бойынша сызықтық теңдеудің жалпы шешімі $z = uv$ болғандықтан

$$z = (c - \ln x)x.$$

Ал Бернулли теңдеуінің жалпы шешімін табу үшін жоғарғыда енгізілген $z = y^{-1}$ белгілеуін қолдану керек. Теңдеудің сол жақтары тең болса, оң жақтарын теңестіре отырып Бернулли теңдеуінің жалпы шешімін табамыз.

$$y^{-1} = (c - \ln x)x$$

$$\frac{1}{y} = (c - \ln x)x$$

$$y = \frac{1}{(c - \ln x)x}$$

Сонымен $y = \frac{1}{x(c - \ln x)}$ - Бернулли теңдеуінің жалпы шешімі.

5.4-мысал: $(e^x + y + Siny)dx + (e^y + x + xCosy)dy = 0$ толық дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

Шешімі:

$$P(x, y) = e^x + y + Siny$$

$$Q(x, y) = e^y + x + xCosy$$

функцияларды белгілеп, олардың (5.8) шартын қанағаттандыруын тексерелік:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(e^x + y + Siny\right)_y' \Big|_{x=const} = 0 + 1 + \text{Cosy} = 1 + \text{Cosy},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(e^y + x + xCosy\right)_x' \Big|_{y=const} = 0 + 1 + \text{Cosy} = 1 + \text{Cosy},$$

Демек $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, берілген $(e^x+y+Siny)dx+(e^y+x+xCosy)dy=0$ теңдеуі толық дифференциалдық теңдеу.

Бірінші әдіс бойынша жалпы шешімі

$$U(x,y)=\mathrm{C}$$

және

$$U(x,y)=\int\left(e^x+y+Siny\right)dx+\varphi(y)$$

өрнегімен есептелінеді

$$U(x,y)=e^x+yx+xSiny+\varphi(y).$$

Табылған $U(x,y)$ шешімінен y бойынша дербес туынды ізделіп

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\left(e^x+yx+xSiny+\varphi(y)\right)_y'\Big|_{x=const}=0+x+xCosy+\varphi'(y),$$ ол есептің шартындағы $Q(x,y)=e^y+x+xCosy$ функциясына теңестіріліп

$$\frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y)$$

$$x+xCosy+\varphi'(y)=e^y+x+xCosy$$

$$\varphi'(y)=e^y.$$

Бұдан

$$\frac{d\varphi(y)}{dy}=e^y$$

$$d\varphi(y)=e^y dy$$

$$\int d\varphi(y)=\int e^y dy$$

$$\varphi(y)=e^y+c_1$$

табылады. Кейіннен $\varphi(y)$ жалпы шешімді табу үшін $U(x,y)$ шешіміне қойсақ

$$U(x,y)=e^x+xy+xSiny+e^y+c_1.$$

Сондай-ақ

$$U(x,y)=\mathrm{C}$$

болғандықтан

$$\mathrm{C}=e^x+xy+xSiny+e^y+c_1$$

Жалпы интеграл: $\mathrm{C}=e^x+xy+xSiny+e^y$

5.5-мысал: $(e^x+y+Siny)dx+(e^y+x+xCosy)dy=0$ толық дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

Шешімі:

$$P(x,y)=e^x+y+Siny$$

$$Q(x,y)=e^y+x+xCosy$$

функциялары белгілі.

$x_o=0, y_o=1$ сандары $P(x,y)$, $Q(x,y)$ функцияларының анықталу облыстарына тиісті сандар.

$U(x,y)=\int_{xo}^{x}P(x,y_o)dx+\int_{yo}^{y}Q(x,y)dy$ формуласынан $U(x,y)=C$ екенін ескерсек:

$$U(x,y)=\int_{xo}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{yo}^{y}Q(x,y)dy$$

$$C=\int_{o}^{x}(e^x+1+Sin1)dx+\int_{1}^{y}(e^y+x+xCosy)dy$$

$$C=(e^x+x+xSin1)\Big|_0^x+(e^y+xy+xSiny)\Big|_1^y$$

$$C=(e^x+x+xSin\ 1)-(e^o+o+oSin\ 1)+(e^y+xy+xSin\ y)-(e^1+x+xSin\ 1)$$

$$C=e^x+x+xSin1-1+e^y+xy+xSiny-e-x-xSin1$$

$$C+1+e=e^x+e^y+xy+xSiny$$

$C=e^x+e^y+xy+xSiny$ - жалпы интегралы.

$U(x,y)=\int_{xo}^{x}P(x,y)dx+\int_{yo}^{y}Q(x_o,y)dy$ формуласынан $U(x,y)=C$ екенін ескерсек:

$$U(x,y)=\int_{xo}^{x}P(x,y)dx+\int_{yo}^{y}Q(x_o,y)dy$$

$$C=\int_{o}^{x}(e^x+y+\sin\ y)dx+\int_{1}^{y}e^y dy$$

$$C=(e^x+xy+x\sin\ y)\Big|_0^x+e^y\Big|_1^y$$

$$C=(e^x+xy+x\sin\ y)-(1+0+0)+(e^y-e)$$

$$C=e^x+xy+x\sin\ y-1+e^y-e$$

$$C+1+e=e^x+e^y+xy+xSiny$$

$C = e^x + e^y + xy + xSiny$ - жалпы интегралы.

5.6-мысал: $ydx - xdy + Ln\ xdx = 0$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

Шешімі:

$(y + Lnx)dx - xdy = 0$

$P(x, y) = y + Lnx$ және $Q(x, y) = -x$

$\frac{\partial P}{\partial y} = (y + Lnx)_y' \Big|_{x=const} = 1$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = (-x)'_{y=const} = -1$

$\frac{\partial p}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$

$\frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{1+1}{-x} = -\frac{2}{x}$ - тек x-тен тәуелді, демек (5.17) өрнегімен интегралдаушы көбейткішті табамыз:

$$\mu(x) = e^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx = e^{-2\ln|x|} = e^{\ln x^{-2}}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$\mu(x) = \frac{1}{x^2}$

$\frac{1}{x^2}(y + \ln x)dx - x\frac{1}{x^2}dy = 0$

$$\underbrace{\left(\frac{y}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}\right)}_{P_1}dx \underbrace{- \frac{1}{x}}_{Q_1}dy = 0$$

$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{1}{x^2}$ және $\frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$

$$U(x, y) = \int P_1(x, y)dx + \varphi(y) = \int\left(\frac{y}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}\right)dx + \varphi(y) = -\frac{y}{x} + \int\frac{\ln x}{x^2}dx + \varphi(y) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} \\ v = -\dfrac{1}{x} \end{array} \right| = -\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\ln x + \int \frac{dx}{x^2} + \varphi(y) = -\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(-\frac{y}{x}\ln x - \frac{1}{x} + \varphi(y) \right)'_y \Big|_{x=const} = -\frac{1}{x} + \varphi'(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x} + \varphi'(y) = Q_1(x, y)$$

$$-\frac{1}{x} + \varphi'(y) = -\frac{1}{x}$$

$$\varphi'(y) = 0$$

$$\varphi(y) = c_1$$

$$U(x, y) = -\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c_1$$

$$C = \frac{y}{x} + \frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x}$$

Сонымен, $y + \ln x + 1 = Cx$ - жалпы шешімі.