Тәжірибелік сабақ №4

4. Дифференциалдық теңдеулер ұғымы. Коши есебі. Айнымалылары ажыратылған бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер. Біртекті бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер

4.1-мысал:

a) $y''+5xy'-x^2y^2=0$ – екінші ретті;

b) $\frac{d^3y}{dx^3}-xy^2\frac{dy}{dx}=7$ – үшінші ретті;

c) $y'+5xy=cosx$ – бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер.

4.2-мысал: y=sinx функциясы y''+y=0 теңдеуінің шешімі бола ма?

Шешімі: берілген теңдеуде y=sinx деп аламыз:

$$(\sin x)''+\sin x=0 \Leftrightarrow -\sin x+\sin x=0 \Leftrightarrow 0=0$$

тепе-теңдігіне келдік, демек y=sinx берілген теңдеудің шешімі болады.

4.3-мысал: $x^3dx+\frac{1}{y}dy=0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешімі: $x^3dx+\frac{1}{y}dy=0$ - бірінші ретті айнымалылары ажыратылған дифференциалдық теңдеу.

Теңдіктің екі жағын интегралдаймыз:

$$\int x^3dx+\int\frac{1}{y}dy=\int 0$$

$\frac{x^4}{4}+\ln|y|=c$ - жалпы интегралы;

$$\ln|y|=c-\frac{x^4}{4}$$

$$\ln|y|=\ln c-\ln e^{\frac{x^4}{4}}$$

$y = \frac{C}{e^{\frac{x^4}{4}}}$ - жалпы шешімі.

4.4-мысал: $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешімі: $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$ - бірінші ретті айнымалылары ажыратылатын теңдеу.

Көпмүшеге жіктесек $x(y^2+1)dx+y(1-x^2)dy=0$ теңдеу (4.10) түріне келеді. Мүшелеп $(1-x^2)$ (y^2+1)-ге бөлсек (4.11) түріне келеді:

$$\frac{x}{1-x^2}dx+\frac{y}{y+1^2}dy=0$$

$\int \frac{x}{1-x^2}dx+\int \frac{y}{1+y^2}dy=\int 0$ теңдеу (4.12) түріне келеді.

Енді мүшелеп интегралдаймыз

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{1-x^2}+\frac{1}{2}\int \frac{d(1+y^2)}{1+y^2}=\frac{1}{2}\ln C$$

$$-\ln\left|1-x^2\right|+\ln\left|1+y^2\right|=\ln C$$

$$\ln\left|\frac{1+y^2}{1-x^2}\right|=\ln|C|$$

$$1+y^2=C(1-x^2)$$

$$y^2=C(1-x^2)-1$$

Демек, $y=\pm\sqrt{C(1-x^2)-1}$ -жалпы шешімі.

4.5-мысал: $yy'=\frac{1-2x}{y}$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы интегралын табыңыз.

Шешімі: $yy'=\frac{1-2x}{y}$ - бірінші ретті айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу.

$y'=\frac{dy}{dx}$ екенін білсек $y\frac{dy}{dx}=\frac{1-2x}{y}$ теңдеуі түрінде жазамыз.

Теңдеудің айнымалыларын ажырату үшін:

$$y^2dy=(1-2x)dx$$

Мүшелеп интегралдайық:

$$\int y^2 dy = \int (1-2x)dx$$

$$\frac{y^3}{3} = x - x^2 + C$$

$C = \frac{y^3}{3} + x^2 - x$ - жалпы интегралы.

4.6-мысал: y′sinx = ylny, $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$ Коши есебінің шешімін анықтаңыз.

Шешімі: y′sinx = ylny - бірінші ретті айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу.

а) жалпы шешімін ізделік:

$$Sinx\frac{dy}{dx} = y\ln y$$

$$Sinxdy = y\ln ydx$$

Теңдеудің екі бөлігін де $Sinx \cdot y\ln y \neq 0$ бөлелік:

$$\frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{Sinx}$$

Мүшелеп интегралдайық:

$$\int \frac{d(\ln y)}{\ln y} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \ln C$$

$$\ln|\ln y| = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \ln C$$

$$\ln y = tg\frac{x}{2}\cdot C$$

$y = e^{c\cdot tg\frac{x}{2}}$ - жалпы шешімі.

ә) С тұрақтысын анықтайық. Ол үшін берілген бастапқы $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$ шартын қолданамыз. Шарттың берілгендерін табылған жалпы шешімге қоямыз. Сонда

$$e = e^{c \cdot tg\frac{\pi}{4}}$$

$$e = e^{c}$$

$c = 1$ - тұрақтының мәні.

б) ізделінді c=1 тұрақтысын жалпы шешімдегі орнына енгізе отырып

$y = e^{tg\frac{x}{2}}$ - дербес шешімге ие боламыз.

4.7-мысал: Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: xdy=(x+y)dx.

Шешімі: $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ түріне келтіру үшін xdy=(x+y)dx теңдігінің екі жағын xdx-ке бөлеміз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}dx$$

$$y' = \frac{x+y}{x}$$

$y' = 1 + \frac{y}{x}$ - бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеу.

$u = \frac{y}{x}, y' = u'x + u$ ауыстыруын $y' = 1 + \frac{y}{x}$ теңдігіне қойсақ:

u′x+u=1+u

u′x=1 / :x

$$u' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int du = \int \frac{dx}{x}$$

$$u = \ln|x| + \ln c$$

$$\ln e^{u} = \ln|cx|$$

$$e^{u} = cx$$

$$x = \frac{e^{u}}{c}$$

$x = \frac{e^{\frac{y}{x}}}{c}$ - жалпы шешімі.

4.8-мысал: Коши есебін шешіңіз:

$$\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0,\quad y\big|_{x=3}=4$$

Шешімі: а) Жалпы шешімін ізделік:

$$\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx=xdy\,/:xdx$$

$$\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{dy}{dx}$$

$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=y'$ - бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеу.

$\boldsymbol{u=\frac{y}{x}}$, яғни y=ux $\Rightarrow$ y′=u′x+u ауыстыруын соңғы теңдікке қоялық

$$u+\sqrt{1+u^2}=u'x+u$$

$$\sqrt{1+u^2}=u'x$$

$$\sqrt{1+u^2}=x\cdot\frac{du}{dx}\Bigg|\cdot\frac{dx}{x\cdot\sqrt{1+u^2}}$$

$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$ мұнда интегралдар кестесінен білу қажеттігін ескертеміз

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+c$$

формуласына қолданып:

$$\ln|x| = \ln\left|u + \sqrt{1+u^2}\right| + \ln|c|$$

$$x = \left(u + \sqrt{1+u^2}\right)c$$

$$x = \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x}c$$

$$\frac{x^2}{c} = y + \sqrt{x^2+y^2}$$ - жалпы шешімі.

ә) x=3, y=4 екенін біле отырып с-тұрақтысын есептелік

$$\frac{9}{c} = 4 + \sqrt{9+16} \Rightarrow \frac{9}{c} = 9 \Rightarrow c = 1$$

б) Анықталған с тұрақтысын жалпы шешімге қойсақ:

$x^2 = y + \sqrt{x^2+y^2}$ - дербес шешімі.