## Тәжірибелік сабақ №3

### 3. Екі еселі интеграл ұғымы. Екі еселі интегралдардың қолданбалары. Қисық сызықты координатадағы екі еселі интеграл. Екі еселі интегралда айнымалыны алмастыру

**3.1-мысал:** $\iint\limits_D \left(x^2 + x\sqrt{y}\right)dxdy, \quad D: x=-1, x=1, y=0, y=4$ интегралын есептеу керек.

*Шешімі:* Интегралдау облысы ретінде жақтары координаталық өстеріне параллель болатын тік төртбұрыш болады, сондықтан қайталама интегралдағы интегралдау шектері тұрақты болады, яғни

$$-1 \le x \le 1, \;\; 0 \le y \le 4$$

болады, олай болса

$$\iint\limits_D \left(x^2 + x\sqrt{y}\right)dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_0^4 \left(x^2 + xy^{1/2}\right)dy = \int\limits_{-1}^{1} \left( x^2 y + \frac{2xy^{3/2}}{3} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=4} dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left( 4x^2 + \frac{16x}{3} \right)dx = \left( \frac{4x^3}{3} + \frac{8x^2}{3} \right)\Bigg|_{-1}^{1} = \left(\frac{4}{3}+\frac{8}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}+\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}.$$

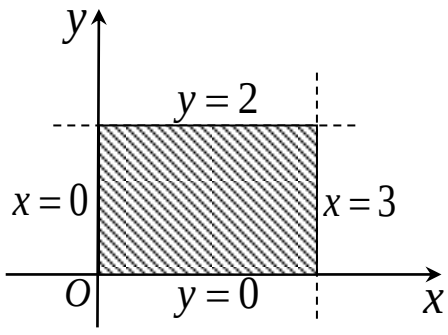
**3.2-мысал:** $\iint\limits_D 9y\,dxdy, \quad D: 0 \le x \le 3, \;\; 0 \le y \le 2$ интегралының мәнін есептеңіз.

*Шешімі:*

a) Егер $f(x,y)$ функциясы $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b, c \le y \le d\}$ тіктөртбұрышында үзіліссіз функция болса, онда

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$$ – қайталанатын интеграл.

b) Интегралдау облысы ретінде жақтары координаталық өстеріне параллель болатын тік төртбұрыш болғандықтан қайталанатын интегралдағы интегралдау шектері тұрақты болады $0 \le x \le 3, \;\; 0 \le y \le 2$, яғни интегралдау облысы $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$, олай



болса

$$\iint_D 9y\,dx\,dy = 9\int_0^3 dx\int_0^2 y\,dy = 9\int_0^3 dx\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=2} = 9\cdot 2\int_0^3 dx = 18x\Big|_0^3 = 18\cdot 3 = 54.$$

c) Жауабы: $54$.

**Мысал 3.3:** Есептеңіз: $\int_L (8x - y)dx, \quad L: y = x,\ O(1;1),\ A(3;3).$

*Шешімі:*

a) Екінші текті қисық сызықты интегралды есептеуде интеграл астындағы өрнекті толықтай не «х-тен», не «у-тен» байланыстыра отырып, анықталған интегралды есептеуге келтіреміз.

*Ескерту:* Интегралдау бағытын дұрыс таңдау қажет.

b) Интеграл астындағы өрнекті толықтай тек «х-тен» тәуелді деп қарастырсақ, онда интегралдау бағыты 1-ден 3-ке дейін болмақ, себебі есептің шарты бойынша $x_1 = 1,\ x_2 = 3$:

$$\int_L (8x - y)dx = \int_1^3 (8x - x)dx = \int_1^3 7x dx = 7\frac{x^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{7}{2}(9-1) = \frac{7}{2}8 = 28.$$

Интеграл астындағы өрнекті толықтай тек «у-тен» тәуелді деп қарастырсақ, онда интегралдау бағыты 1-ден 3-ке дейін болмақ, себебі есептің шарты бойынша $y_1 = 1,\ y_2 = 3$:

$$\int_L (8x - y)dx = \int_1^3 (8y - y)dy = \int_1^3 7y dy = 7\frac{y^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{7}{2}(9-1) = \frac{7}{2}8 = 28.$$

Интегралдау айнымалыларын өзгерткенмен екі жауап та бірдей болатынын көруге болады.

c) Жауабы: $28$.

**Мысал 3.4:** Есептеңіз: $\int_L y^3dx + (x + 2y)dy,\ L: x = y,\ O(2;2),\ A(4;4).$

*Шешімі:*

a) Егер $L$ қисығы $y = \varphi(x), a \le x \le b$ формуласымен берілсе, онда қисық сызықты интеграл

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)]\cdot dx \qquad (3.2)$$

формуласымен есептеледі.

Егер $L$ қисығы $x = \psi(y), c \le y \le d$ формуласымен берілсе, онда қисық сызықты интеграл

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_c^d [P(\psi(y),y) + Q(\psi(y),y)\cdot\psi'(y)]\cdot dy \quad (3.3)$$

формуласымен есептеледі.

b) (3.3) формуласы бойынша интеграл астындағы өрнекті толықтай тек «х-тен» тәуелді деп қарастырсақ, онда интегралдау бағыты 2-ден 4-ке дейін болмақ, себебі есептің шарты бойынша $x_1 = 2,\ x_2 = 4$:

$$\int_L y^3dx + (x+2y)dy = \left|\begin{matrix} x=y \\ dx=dy \end{matrix}\right| = \int_2^4 x^3dx + (x+2x)dx = \int_2^4 x^3dx + 3xdx =$$

$$= \int_2^4 (x^3+3x)dx = \frac{x^4}{4}\Big|_2^4 + 3\frac{x^2}{2}\Big|_2^4 = \left(\frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4}\right) + 3\left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right) =$$

$$= 64 - 4 + 3(8-2) = 78.$$

(3.3) формуласы бойынша интеграл астындағы өрнекті толықтай тек «у-тен» тәуелді деп қарастырсақ, онда интегралдау бағыты 2-ден 4-ке дейін болмақ, себебі есептің шарты бойынша $y_1 = 2,\ y_2 = 4$:

$$\int_L y^3dx + (x+2y)dy = \left|\begin{matrix} x=y \\ dx=dy \end{matrix}\right| = \int_2^4 y^3dy + (y+2y)dy =$$

$$= \int_2^4 y^3dy + 3ydy = \int_2^4 (y^3+3y)dy = \frac{y^4}{4}\Big|_2^4 + 3\frac{y^2}{2}\Big|_2^4 = \left(\frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4}\right) + 3\left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right) =$$

$$= 64 - 4 + 3(8-2) = 78.$$

Интегралдау айнымалыларын өзгерткенмен екі жауап та бірдей болды.

c) Жауабы: $78$.