Тәжірибелік сабақ №2

2. Бетке жүргізілген жанама жазықтық пен нормаль. Функцияның экстремумы. Функцияның шектелген тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндері. Бағыт бойынша туынды және градиент.

2.1-мысал. $3x^2 - y^2 + z^3 + xy + yz = 0$ бетінің $M_0(0;2;1)$ нүктесінде жүргізілген жанама жазықтығы және нормаль теңдеуін табу керек.

Шешімі: Берілген $M_0(0;2;1)$ нүктесіндегі функцияның дербес туындылары:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0(0;2;1)} = \left(\left(3x^2 - y^2 + z^3 + xy + yz\right)\Big|_x'\right)_{M_0(0;2;1)} = (6x + y)\Big|_{M_0(0;2;1)} = 2;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0(0;2;1)} = \left(\left(3x^2 - y^2 + z^3 + xy + yz\right)\Big|_y'\right)_{M_0(0;2;1)} = (-2y + x + z)\Big|_{M_0(0;2;1)} = -3;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0(0;2;1)} = \left(\left(3x^2 - y^2 + z^3 + xy + yz\right)\Big|_z'\right)_{M_0(0;2;1)} = (3z^2 + y)\Big|_{M_0(0;2;1)} = 5.$$

Демек, $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)(z - z_0) = 0$ түріндегі *жанама жазықтықтың теңдеуі:*

$$2(x - 0) - 3(y - 2) + 5(z - 1) = 0$$

немесе

$$2x - 3y + 5z + 1 = 0.$$

ал $\frac{x - x_0}{\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)}$ түріндегі *нормаль теңдеуі:*

$$\frac{x}{2} = \frac{y - 2}{-3} = \frac{z - 1}{5}.$$

2.2-мысал. $z = 1 + x^2 + y^2$ бетінің $M_0(1;2;3)$ нүктесінде жүргізілген жанама жазықтығы мен нормаль теңдеуін табу керек.

Шешімі: z функциясының дербес туындылары $M_0(1;2;3)$ нүктесіндегі мәндері:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0(1,2,3)} = 2x\big|_{M_0(1,2,3)} = 2,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0(1,2,3)} = 2y\big|_{M_0(1,2,3)} = 4.$$

Осыдан, $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)(x-x_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)(y-y_0)=z-z_0$ түріндегі *жанама жазықтығының теңдеуі:*

$2(x-1)+4(y-2)=z-3$ немесе $2x+4y-z-7=0,$

ал $\frac{x-x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$ түріндегі *нормаль теңдеуі:*

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-1}.$$

2.3-мысал. $z=2x^2-xy+3y^2-5x+7y$ функциясын экстремумге зерттеу керек.

Шешімі:

Экстремумның жеткілікті шарты: екі айнымалы функция экстремум мәндерін тек оның барлық дербес туындылары нөлге тең болатын нүктелерінде ғана қабылдайды, яғни

$$f'_x(x,y)=0, \quad f'_y(x,y)=0.$$

Бірінші ретті дербес туындылары:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(2x^2-xy+3y^2-5x+7y\right)'_x=4x-y-5,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(2x^2-xy+3y^2-5x+7y\right)'_y=-x+6y+7.$$

Кризистік нүктесінің координаталарын табу үшін $\begin{cases}4x-y-5=0\\-x+6y+7=0\end{cases}$ жүйесін шешсек $x=1,\ y=-1$ шешімдерін аламыз, яғни $M(1;-1)$ нүктесі.

Экстремумның жеткілікті шарты:

$A=f''_{xx}(a,b),\ B=f''_{xy}(a,b),\ C=f''_{yy}(a,b)$ болса, оның дискриминанты $\Delta=AC-B^2.$

Демек, ізделінді $M(1;-1)$ кризистік нүктесіндегі екінші ретті дербес туындыларын есептейміз:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(4x-y-5\right)_x'=4,$$

$$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(4x-y-5\right)_y'=-1,$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(-x+6y+7\right)_y'=6.$$

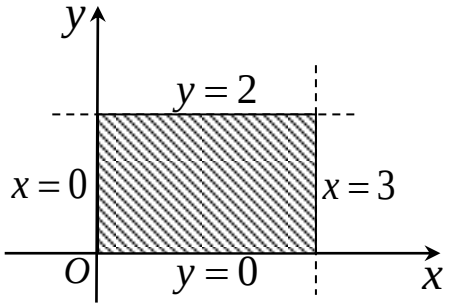
Сонымен $\Delta=AC-B^2=4\cdot 6-(-1)^2=23>0$ болса шарт бойынша экстремум бар.

$A>0, C>0$ болғандықтан $M(1;-1)$ нүктесінде берілген функция минимум мәнін қабылдайды:

$$z_{\min}=z(M)=\left(2x^2-xy+3y^2-5x+7y\right)_{M(1,-1)}=$$

$$=2\cdot 1^2-1\cdot(-1)+3(-1)^2-5\cdot 1+7(-1)=-6.$$

2.4-мысал. $f(x,y)=x^2+y^2-2x-4y+5$ функциясының $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 3, 0\le y\le 2\}$ облысында ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек (2.1-сурет).



2.1-сурет

Шешімі:

1. Ішкі нүктелердегі кризистік нүктелерді табу

Бірінші ретті дербес туындыларды табамыз:

$$f_x(x,y)=2x-2=0\Rightarrow x=1,$$

$$f_y(x,y)=2y-4=0\Rightarrow y=2.$$

Кризистік нүкте: (1,2).

Бірақ бұл нүкте біздің облыстың ішінде ме? $y=2$ шекарада жатыр (жоғарғы жиек). Демек, бізде ішкі кризистік нүкте жоқ**.**

2. Шекарада зерттеу

***а*) Төменгі қыры:** $y=0,\ 0\le x\le 3$

$f(x,0)=x^2-2x+5$

Бұл x бойынша квадраттық функция. Экстремумдары:

$f'(x,0)=2x-2=0 \Rightarrow x=1$

Мәндер:

- $f(1,0)=1-2+5=4$
- Шеткі нүктелер: $f(0,0)=5$, $f(3,0)=9-6+5=8$.

***б*) Жоғарғы қыры:** $y=2,\ 0\le x\le 3$

$f(x,2)=x^2-2x+1=(x-1)^2$

- $f(1,2)=0$
- Шеткі нүктелер: $f(0,2)=1$, $f(3,2)=4$.

***в*) Сол жақ қыры:** $x=0,\ 0\le y\le 2$

$f(0,y)=y^2-4y+5$

$f'(0,y)=2y-4=0 \Rightarrow y=2$

- $f(0,2)=1$ (бұрын есептелген)
- Шеткі нүктелер: $f(0,0)=5$, $f(0,2)=1$.

***г*) Оң жақ қыры:** $x=3,\ 0\le y\le 2$

$f(3,y)=y^2-4y+8$

$f'(3,y)=2y-4=0 \Rightarrow y=2$

- $f(3,2)=4$ (бұрын есептелген)
- Шеткі нүктелер: $f(3,0)=8$, $f(3,2)=4$.

3. Барлық мәндерді салыстыру

Барлық нүктелердегі функция мәндері:

1. $f(1,0)=4$
2. $f(0,0)=5$
3. $f(3,0)=8$
4. $f(1,2)=0$ - **ең кіші мән**
5. $f(0,2)=1$
6. $f(3,2)=4$

Нәтиже:

- **Ең кіші мән:** 0, (1,2) нүктесінде (шекарада стационар нүкте)
- **Ең үлкен мән:** 8, (3,0) нүктесінде (шекараның шеткі нүктесі/ бұрышында)

Қорытынды

Бұл мысалда:

1. Ішкі кризистік нүктелер болмады;
2. Ең кіші мән шекарадағы стационар нүктеде ($y=2$ түзуіндегі $x=1$)
3. Ең үлкен мән шекараның бұрышында ($x=3$, $y=0$)

Бұл теорияны растайды: тұйық облыста функцияның экстремумдары *не ішкі кризистік нүктелерде, не шекарада* болады.

2.5-мысал. $u(M) = xy + yz + 1$ функциясы мен $M_1(0;-2;-1)$, $M_2(3;3;5)$ нүктелері берілген. Осы функцияның M_1 нүктесіндегі $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ векторының бағыты бойыншы туындысын және $gradu(M_1)$ табу керек.

Шешімі: $u(M)$ функциясының M_1 нүктесіндегі $\overline{M_1M_2}$ бағыты бойынша туындысы

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial \vec{a}} = u'_x(M_1)\cos\alpha + u'_y(M_1)\cos\beta + u'_z(M_1)\cos\gamma$$

формуласымен табылады, мұндағы $\vec{v} = \{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$ векторы $\overline{M_1M_2}$ бағытының бірлік векторы.

Бірінші ретті дербес туындылары:

$$u'_x(M_1) = y\big|_{M_1} = -2,$$

$$u'_y(M_1) = (x+z)\big|_{M_1} = -1,$$

$$u'_z(M_1) = y\big|_{M_1} = -2.$$

Ал $\overline{M_1M_2}$ векторының координаталары мен модулі:

$$\overline{M_1M_2} = \{3-0;\ 3-(-2);\ 5-(-1)\} = \{3;5;6\},$$

$$|M_1M_2| = \sqrt{9+25+36} = \sqrt{70}.$$

Бағыттаушы косинустары:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|M_1M_2|} = \frac{3}{\sqrt{70}};$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|M_1M_2|} = \frac{5}{\sqrt{70}};$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|M_1M_2|} = \frac{6}{\sqrt{70}}.$$

Демек, $u(M)$ функциясының M_1 нүктесіндегі $\overline{M_1M_2}$ *бағыты бойынша туындысы*

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial \vec{a}} = (-2)\cdot\frac{3}{\sqrt{70}} + (-1)\frac{5}{\sqrt{70}} + (-2)\frac{6}{\sqrt{70}} = -\frac{23}{\sqrt{70}}.$$

Анықтама бойынша *градиент*:

$$\overrightarrow{grad}\, u(M_1) = u'_x(M_1)i + u'_y(M_1)j + u'_z(M_1)k.$$

$$\overrightarrow{grad}\, u(M_1) = -2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}.$$