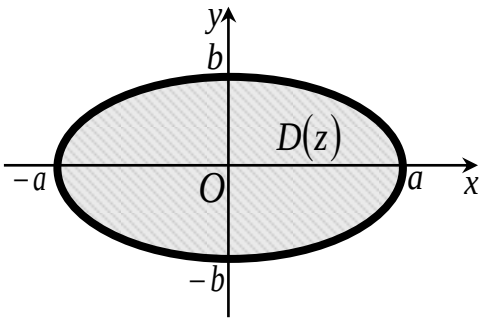
Тәжірибелік сабақ №1

1. Көп айнымалы функциялар туралы негізгі ұғымдар. Көп айнымалы функцияның шектері мен үзіліссіздігі. Дербес туындылар. Айқын түрде берілген функциялардың дербес туындылары. $F(x,y,z)=0$ айқын емес функциясының дифференциалы. Күрделі функцияның туындысы. Толық туынды. Толық дифференциал. Жоғарғы ретті дербес туындылар. Аралас туындылар туралы теорема. Жоғарғы ретті толық дифференциалдар

1.1-мысал: $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ функциясының $D(z)$ анықталу облысын табыңыз.

Шешімі:

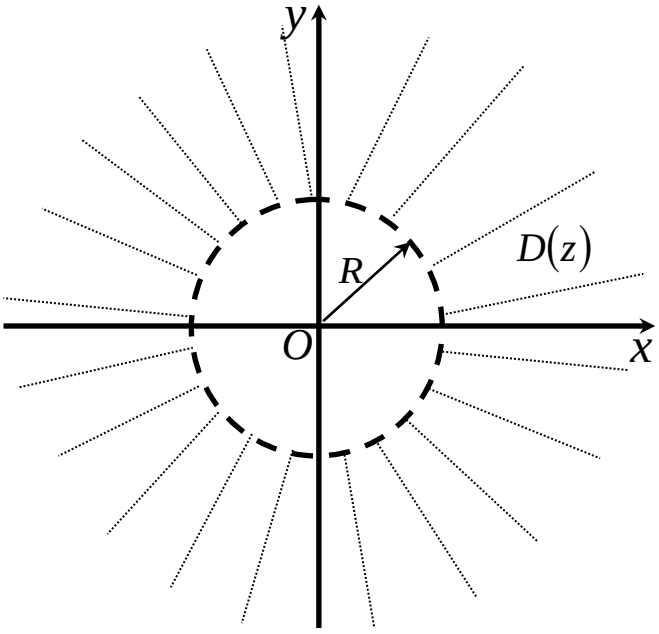
$$1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\geq 0 \Rightarrow -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\geq -1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1.$$



1.2-мысал: $z=\frac{1}{R^2-x^2-y^2}$ функциясының $D(z)$ анықталу облысын табыңыз.

Шешімі:

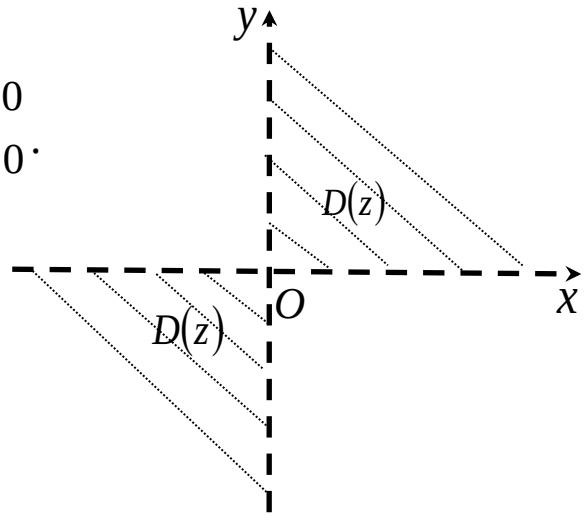
$$R^2-x^2-y^2\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2\neq R^2$$



1.3-мысал: $z = \ln xy$ функциясының $D(z)$ анықталу облысын табыңыз.

Шешімі:

$$\ln xy > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \text{немесе} \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}.$$



1.4-мысал: $A = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ шегін есептеңіз.

Шешімі:

$$A = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \frac{0}{0} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{x^2+y^2+1-1} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \sqrt{x^2+y^2+1}+1 = 2.$$

Жауабы: $A = 2.$

1.5-мысал: $A = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{x^2\cdot y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ шегін есептеңіз.

Шешімі:

$$A = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x^2\cdot y^2+1}-1}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{\left(\sqrt{x^2\cdot y^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2\cdot y^2+1}+1\right)}{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2\cdot y^2+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{x^2\cdot y^2+1-1}{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2\cdot y^2+1}+1\right)} = \frac{0}{0} = \left|y = kx\right| = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot k^2x^2}{\left(x^2+k^2x^2\right)\left(\sqrt{x^2\cdot k^2x^2+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^4}{x^2\left(1+k^2\right)\left(\sqrt{k^2x^4+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^2}{\left(1+k^2\right)2} = \frac{0}{2\left(1+k^2\right)} = 0.$$

Жауабы: $A = 0.$

1.6-мысал: $A=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ шегін есептеңіз.

Шешімі:

$$A=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{0}{0}=\left|y=kx\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2kx^2}{x^2\left(1+k^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2k}{1+k^2}=$$ шегі жоқ.

Жауабы: шегі жоқ.

1.7-мысал: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\cdot y^2}{x^2+y^2}, & \text{егер } x\neq 0,\ y\neq 0\\ 0, & \text{егер } x=0,\ y=0\end{cases}$ үзіліссіздікке зерттеңіз.

Шешімі:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2\cdot y^2}{x^2+y^2}=\frac{0}{0}=\left|y=kx\right|=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^4}{x^2\left(1+k^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^2}{1+k^2}=\frac{0}{1+k^2}=0.$$

Есептің шарты бойынша $f(0,0)=0$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ үзіліссіздіктің шарты бойынша:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2\cdot y^2}{x^2+y^2}=f(0,0)=0.$$

Жауабы: $f(x,y)$ функциясы $(0,0)$ нүктесінде үзіліссіз.

1.8-мысал: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot y}{x^2+y^2}, & \text{егер } x\neq 0,\ y\neq 0\\ 0, & \text{егер } x=0,\ y=0\end{cases}$ үзіліссіздікке зерттеңіз.

Шешімі:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x\cdot y}{x^2+y^2}=\frac{0}{0}=\left|y=kx\right|=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2\left(1+k^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2}{1+k^2}=$$ шегі жоқ.

Есептің шарты бойынша $f(0,0)=0$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ үзіліссіздіктің шарты бойынша:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x\cdot y}{x^2+y^2}\neq f(0,0).$$

Жауабы: $f(x,y)$ функциясы $(0,0)$ нүктесінде үзілісті.

1.9-мысал: Егер $z = arctg\frac{x}{y}$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің M(0;1) нүктесіндегі мәнін табыңыз.

Шешімі:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x\big|_{y=const} = \left(arctg\frac{x}{y}\right)'_x = \left|\begin{array}{l}\left(arctgu\right)' = \frac{1}{1+u^2}u' \\ \left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c}u' \\ \text{формулалары бойынша}\end{array}\right| = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y} =$$

$$= \frac{1}{\frac{y^2+x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{y^2+x^2}{y}} = \frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y\big|_{x=const} = \left(arctg\frac{x}{y}\right)'_y = \left|\begin{array}{l}\left(arctgu\right)' = \frac{1}{1+u^2}u' \\ \left(\frac{c}{u}\right)' = -\frac{c}{u^2}u' \\ \text{формулалары бойынша}\end{array}\right| = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot x\left(-\frac{1}{y^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\frac{y^2+x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2}.$$

$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің M(0;1) нүктесіндегі мәні:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right)\Big|_{M(0;1)} = \left(\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2}\right)\Big|_{M(0;1)} = \frac{y-x}{x^2+y^2}\Big|_{M(0;1)} = \frac{1-0}{0^2+1^2} = 1.$$

Жауабы: 1.

1.10-мысал: Егер $u = x^3 + yz^2 + 3yx - x + z$ болса $\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$ өрнегінің M(0;1;2) нүктесіндегі мәнін табыңыз.

Шешімі:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=u'_x\big|_{y,z=const}=\left|\begin{array}{l}\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha u^{\alpha-1}u'\\ \left(cu\right)'=cu'\\ \text{формулалары бойынша}\end{array}\right|=\left(x^3+yz^2+3yx-x+z\right)'_x$$

$$=3x^2+3y-1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=u'_y\big|_{x,z=const}=\left(x^3+yz^2+3yx-x+z\right)'_y=z^2+3x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=u'_z\big|_{x,y=const}=\left(x^3+yz^2+3yx-x+z\right)'_z=2yz+1.$$

$\frac{\partial u}{\partial x}-2\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}$ өрнегінің M(0;1;2) нүктесіндегі мәні:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-2\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{\mathrm{M}(0;1;2)}=\left(3x^2+3y-1\right)-2\left(z^2+3x\right)+\left(2yz+1\right)=$$

$$=\left(3\cdot0^2+3\cdot1-1\right)-2\left(2^2+3\cdot0\right)+\left(2\cdot1\cdot2+1\right)=-1$$

Жауабы: -1.

1.11-мысал: $xyz+x^3-y^3-z^3+5=0$ айқын емес функциясының дербес туындыларын табыңыз.

Шешімі:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{yz+3x^2}{xy-3z^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{xz-3y^2}{xy-3z^2}.$$

1.12-мысал: $z=\sin(uv)$ функциясының $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындыларын табыңыз, мұндағы $u=2x+3y,\quad v=xy.$

Шешімі:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=v\cos(uv)\cdot2+\cos(uv)\cdot u\cdot y=$$

$$=\left(2v+yu\right)\cos(uv)=\left(2xy+y\left(2x+3y\right)\right)\cos\left(\left(2x+3y\right)xy\right)=$$

$$=\left(4xy+3y^2\right)\cos\left(2x^2y+3xy^2\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=v\cos(uv)\cdot 3+\cos(uv)\cdot u\cdot x=$$
$$=(3v+ux)\cos(uv)=(3xy+(2x+3y)x)\cos((2x+3y)xy)=$$
$$=(6xy+2x^2)\cos(2x^2y+3xy^2).$$

Егер $z=F(x,y,u)$ функциясы берілсе, мұндағы $y=f(x),\quad u=\psi(x)$, онда

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}$$ - толық туындының формуласы.

1.13-мысал: $z=x+y^2+u^3$ функциясының $\frac{dz}{dx}$ туындысын табыңыз, мұндағы $y=\sin x,\quad u=\cos x.$

Шешімі:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}=1+2y\cos x+3u^2(-\sin x)=$$
$$=1+2\sin x\cos x-3\cos^2 x\sin x=1+\sin 2x-3\cos^2 x\sin x.$$

1.14-мысал: $z=\sin(xy)$ функциясының dz толық дифференциалын табыңыз.

Шешімі:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=y\cos(xy)dx+x\cos(xy)dy=\cos(xy)(ydx+xdy).$$

1.15-мысал: $z=x^3+x^2y-5xy^3+y^5$ функциясының $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ екінші ретті дербес туындыларын табыңыз.

Шешімі: Бірінші ретті дербес туындылары:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=3x^2+2xy-5y^3;\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=x^2-15xy^2+5y^4;$$

Екінші ретті дербес туындылары:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=\left(3x^2+2xy-5y^3\right)'_x=6x+2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = \left(3x^2 + 2xy - 5y^3\right)'_y = 2x - 15y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = \left(x^2 - 15xy^2 + 5y^4\right)'_x = 2x - 15y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = \left(x^2 - 15xy^2 + 5y^4\right)'_y = -30xy + 20y^3.$$

1.16-мысал: Жоғарғыдағы 1.15-мысалындағы $z = x^3 + x^2 y - 5xy^3 + y^5$ функциясының $d^2 z,\ d^3 z$ толық дифференциалдарын табыңыз.

Шешімі: Жоғарғыдағы $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ дербес туындыларын ескеріп

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{dx^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

формуласын қолдансақ

$$d^2 z = (6x + 2y)dx^2 + 2\left(2x - 15y^2\right)dx dy + \left(-30xy + 20y^3\right)dy^2.$$

Үшінші ретті толық дифференциалын

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{dx^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3$$

формуласымен табу үшін келесі үшінші ретті дербес туындылар ізделінеді:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = z'''_{xxx} = (6x + 2y)'_x = 6;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = z'''_{xxx} = (6x + 2y)'_y = 2;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = z'''_{xyy} = \left(2x - 15y^2\right)'_y = -30y;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = z'''_{yyy} = \left(-30xy + 20y^3\right)'_y = -30x + 60y^2.$$

Бұдан

$$d^3 z = 6dx^3 + 6\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy - 90y dx dy^2 + \left(-30x + 60y^2\right)dy^3.$$