БІЛІМ АЛУШЫНЫҢ ӨЗДІК ЖҰМЫСЫНЫҢ ТАПСЫРМАЛАРЫ №7

7. Кездейсоқ оқиғалар тақырыбына арналған типтік есептер

1. Дискретті кездейсоқ шамасының үлестірім

$$\begin{array}{ccccccc} X & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ P & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{array}$$

қатары берілген. $F(x)$ үлестірім функциясын, $M(X)$ математикалық үмітін, $D(X)$ дисперсиясын тауып, X кездейсоқ шаманың мәндері $(\alpha;\beta)$ интервалына түсу ықтималдығын табу керек.

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	α	β
1	2	4	5	6	7	0,15	0,20	0,30	0,25	0,10	3	5
2	-2	2	4	7	10	0,05	0,20	0,25	0,40	0,10	1	4
3	2	4	7	10	12	0,10	0,15	0,30	0,25	0,20	4	6
4	-2	-1	0	2	4	0,05	0,20	0,35	0,25	0,15	-1	3
5	1	2	4	6	8	0,10	0,35	0,30	0,20	0,05	2	5
6	4	-2	1	3	6	0,10	0,25	0,30	0,20	0,15	-2	2
7	2	3	4	6	8	0,10	0,40	0,25	0,20	0,05	4	7
8	-1	0	2	4	5	0,20	0,25	0,30	0,15	0,10	0	3
9	-4	-2	0	1	4	0,15	0,25	0,35	0,20	0,05	-3	1
10	2	4	5	6	7	0,05	0,20	0,30	0,35	0,10	1	5
11	-2	-1	2	4	5	0,15	0,20	0,30	0,25	0,10	-1	3
12	2	3	6	8	9	0,05	0,20	0,25	0,40	0,10	3	5
13	-1	2	3	4	6	0,10	0,15	0,30	0,25	0,20	3	7
14	-2	1	4	6	8	0,05	0,20	0,35	0,25	0,15	0	6
15	2	4	5	7	8	0,10	0,35	0,30	0,20	0,05	0	5
16	4	5	6	8	9	0,10	0,25	0,30	0,20	0,15	3	6
17	1	3	6	8	10	0,10	0,40	0,25	0,20	0,05	3	7
18	3	4	6	8	9	0,20	0,25	0,30	0,15	0,10	4	7
19	2	4	6	7	8	0,15	0,25	0,35	0,20	0,05	3	7
20	-6	-3	0	2	5	0,05	0,20	0,30	0,35	0,10	-3	1
21	-6	-3	-1	0	2	0,15	0,20	0,30	0,25	0,10	-2	2
22	2	5	8	10	12	0,05	0,20	0,25	0,40	0,10	2	6
23	-2	0	3	6	8	0,10	0,15	0,30	0,25	0,20	3	5

24	-2	1	4	6	8	0,05	0,20	0,35	0,25	0,15	1	5
25	3	4	6	7	8	0,10	0,35	0,30	0,20	0,05	4	9
26	-1	2	4	5	8	0,10	0,25	0,30	0,20	0,15	0	5
27	-5	-4	-2	0	2	0,10	0,40	0,25	0,10	0,05	-4	1
28	2	4	5	6	7	0,20	0,25	0,30	0,5	0,10	3	5
29	-4	-2	1	4	9	0,15	0,25	0,35	0,20	0,05	-2	3
30	4	5	6	7	9	0,05	0,20	0,30	0,35	0,10	4	8

2. Математикалық үміті $M(X)$ және дисперсиясы $D(X)$ ықтималдығы P_1 тең болатын X дискретті кездейсоқ шамасының x_1, x_2 екі мән қабылдайды, мұндағы $x_1 < x_2$. Кездейсоқ шаманың үлестірім заңын жазу керек.

№	$M(X)$	$D(X)$	P_1	№	$M(X)$	$D(X)$	P_1
1	3,1	0,09	0,9	**2**	3,2	0,16	0,8
3	3,3	0,21	0,7	**4**	2,8	0,96	0,6
5	3,5	0,25	0,5	**6**	3,6	0,24	0,4
7	3,7	0,21	0,3	**8**	3,8	0,16	0,2
9	3,9	0,09	0,1	**10**	2,2	0,36	0,9
11	1,8	0,16	0,2	**12**	1,4	0,24	0,6
13	2,6	0,64	0,2	**14**	2,7	0,21	0,3
15	4,1	0,21	0,9	**16**	5,8	0,36	0,1
17	1,7	0,09	0,1	**18**	2,6	0,24	0,4
19	3,2	2,16	0,6	**20**	3,4	0,64	0,8
21	3,1	0,09	0,9	**22**	2,3	0,21	0,7
23	2,4	0,24	0,6	**24**	2,2	0,16	0,8
25	2,5	0,25	0,5	**26**	3,3	0,81	0,9
27	4,8	0,16	0,2	**28**	4,6	0,24	0,4
29	4,7	0,21	0,3	**30**	4,5	0,25	0,5

3. X кездейсоқ шамасының $F(x)$ интегралдық функциясы берілген. *f(x)* дифференциалдық функциясын, *M(X)* математикалық үмітін, *D(X)* дисперсиясын тауып, X кездейсоқ шаманың мәндері $(\alpha;\beta)$ интервалына түсу ықтималдығын тау керек.

№	$F(x)$	α	β	№	$F(x)$	α	β
1	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$	-0,5	2,5	2	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^2}{16}, & 0 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$	-0,5	3
3	$\begin{cases} 0, & x \le 2 \\ x-2, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$	-0,5	2,5	4	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$	0,5	1,5
5	$\begin{cases} 0, & x \le 4 \\ x-4, & 4 < x \le 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$	2	6	6	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^3}{8}, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$	0,5	2,5
7	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^2}{9}, & 0 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$	-0,5	2,5	8	$\begin{cases} 0, & x \le 1 \\ x-1, & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$	-1	1,5
9	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$	-0,5	2,5	10	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^3}{27}, & 0 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$	-0,5	2,5
11	$\begin{cases} 0, & x \le -0,5 \\ 2x+1, & -0,5 < x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$	-1,5	0,5	12	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 4x, & 0 < x \le 0,25 \\ 1, & x > 0,25 \end{cases}$	0,5	2,5
13	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 5x, & 0 < x \le 0,2 \\ 1, & x > 0,2 \end{cases}$	-0,5	1,5	14	$\begin{cases} 0, & x \le -1/4 \\ 4x+1, & -1/4 < x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$	0,5	3,5
15	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2/25, & 0 < x \le 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$	1,5	3,5	16	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 6x, & 0 < x \le 1/6 \\ 1, & x > 1/6 \end{cases}$	0,1	0,5

17	$\begin{cases} 0, & x \le \frac{1}{5} \\ 5x-1, & \frac{1}{5} < x \le \frac{2}{5} \\ 1, & x > \frac{2}{5} \end{cases}$	0,15	0,35	18	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 7x, & 0 < x \le 1/7 \\ 1, & x > 1/7 \end{cases}$	-0,5	0,1
19	$\begin{cases} 0, & x \le -1/6 \\ 6x+1, & -1/6 < x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$	-0,5	0,1	20	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 8x, & 0 < x \le 1/8 \\ 1, & x > 1/8 \end{cases}$	0,08	0,12
21	$\begin{cases} 0, & x \le \frac{3\pi}{4} \\ \cos 2x, & \frac{3\pi}{4} < x \le \pi \\ 1, & x > \pi \end{cases}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$	22	$\begin{cases} 0, & x \le 0{,}5 \\ 2x-1, & 0{,}5 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
23	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 3x, & 0 < x \le 1/3 \\ 1, & x > 1/3 \end{cases}$	0,2	2,5	24	$\begin{cases} 0, & x \le 3 \\ \frac{x}{3}-1, & 3 < x \le 6 \\ 1, & x > 6 \end{cases}$	-4	5
25	$\begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{x^2-x}{2}, & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$	-1	1,5	26	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^3, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$	0,5	2,5
27	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 3x^2+2x, & 0 < x \le \frac{1}{3} \\ 1, & x > 1/3 \end{cases}$	-0,2	0,2	28	$\begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 0{,}5x-1, & 2 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$	2,2	3,8
29	$\begin{cases} 0, & x \prec -0{,}5\pi \\ \cos x, & -0{,}5\pi < x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	30	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 2\sin x, & 0 < x \le \frac{\pi}{6} \\ 1, & x > \pi/6 \end{cases}$	-0,5	2,5

4. Х кездейсоқ шамасының *f(x)* дифференциалдық функциясы берілген. Берілген кездейсоқ шаманың: Тұрақты *c* санын, $F(x)$ интегралдық функциясын, *M(X)* математикалық үмітін, *D(X)* дисперсиясын, Х кездейсоқ шаманың мәндері $(\alpha;\beta)$ интервалына түсу ықтималдығын тау керек.

№	$f(x)$	α	β	№	$f(x)$	α	β

1	$\begin{cases} 0, & x \le 2 \\ c \cdot x^2, & 2 < x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$	2,5	4,5	2	$\begin{cases} 0, & x \le 1 \\ c \cdot x, & 1 < x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$	0,5	2,5
3	$\begin{cases} 0, & x \le 2 \\ c \cdot x^3, & 2 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$	1	3	4	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ c \cdot x^2, & 0 < x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$	1,5	3,5
5	$\begin{cases} 0, & x \le 2 \\ c \cdot x, & 2 < x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$	1,5	2,5	6	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ c \cdot x^3, & 0 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$	2	5
7	$\begin{cases} 0, & x \le 1 \\ c \cdot x^2, & 1 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$	0,5	3	8	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ c \cdot x, & 0 < x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$	2,5	4,5
9	$\begin{cases} 0, & x \le 3 \\ c \cdot x^3, & 3 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$	1	3,5	10	$\begin{cases} 0, & x \le 2 \\ c \cdot x^2, & 2 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$	1,5	3
11	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ c \cdot x, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$	0,5	3,5	12	$\begin{cases} 0, & x \le 1 \\ c \cdot x^3, & 1 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$	0,5	1,5
13	$\begin{cases} 0, & x \le 1 \\ c \cdot x^2, & 1 < x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$	0,5	2	14	$\begin{cases} 0, & x \le 2 \\ c \cdot x, & 2 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$	2,5	4,5
15	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ c \cdot x^3, & 0 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$	1	3	16	$\begin{cases} 0, & x \le 3 \\ c \cdot x^2, & 3 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$	1,5	3,5
17	$\begin{cases} 0, & x \le 1 \\ c \cdot x, & 1 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$	2,5	4,5	18	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ c \cdot x^3, & 0 < x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$	1	4,5
19	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ c \cdot x^2, & 0 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$	1,5	4,5	20	$\begin{cases} 0, & x \le 1 \\ c \cdot x, & 1 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$	0,5	1,5
21	$\begin{cases} 0, & x \le 1 \\ c \cdot x^3, & 1 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$	2	5	22	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ c \cdot x^2, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$	0,5	3,5

23	$\begin{cases} 0, & x \le 3 \\ c \cdot x, & 3 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$	2,5	3,5	24	$\begin{cases} 0, & x \le 2 \\ c \cdot x^3, & 2 < x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$	1,5	2,5
25	$\begin{cases} 0, & x \le 1 \\ c \cdot x^2, & 1 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$	0,5	1,5	26	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ c \cdot x, & 0 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$	2,5	4,5
27	$\begin{cases} 0, & x \le 1 \\ c \cdot x^3, & 1 < x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$	0,5	2	28	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ c \cdot x^2, & 0 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$	2	4,5
29	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ c \cdot x, & 0 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$	0,5	2,5	30	$\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ c \cdot x^3, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$	0,5	1,5

5. Математикалық үміті a және орта квадраттық ауытқуы σ тең болатын X кездейсоқ шамасының бірқалыпты үлестіру заңының $(\alpha; \beta)$ аралығына түсу ықтималдығын табу керек.

№	a	σ	α	β	№	a	σ	α	β
1	10	4	2	13	**2**	8	4	4	9
3	9	5	5	14	**4**	7	2	3	10
5	6	3	2	11	**6**	5	1	1	12
7	4	5	2	11	**8**	3	2	3	10
9	2	5	4	9	**10**	2	4	6	10
11	50	5	45	52	**12**	20	3	17	26
13	36	4	30	40	**14**	60	5	54	70
15	48	4	45	56	**16**	30	3	24	33
17	35	4	27	37	**18**	45	5	40	48
19	40	3	34	43	**20**	25	2	20	27
21	14	12	8	16	**22**	6	4	2	10
23	5	3	4	7	**24**	3	3	4	12
25	10	2	4	14	**26**	15	3	5	12
27	8	3	6	11	**28**	12	4	6	14
29	12	1	2	6	**30**	15	5	7	12

Тапсырмаларды шығару жолы

1. Дискретті кездейсоқ шамасының

X	-2	-1	1	2	4
P	$0{,}05$	$0{,}20$	$0{,}30$	$0{,}35$	$0{,}10$

үлестірім қатары берілген. $F(x)$ үлестірім функциясын, *M(X)* математикалық үмітін, *D(X)* дисперсиясын тауып, X кездейсоқ шаманың мәндері $(2;8)$ интервалына түсу ықтималдығын тап.

Шешуі.

Егер $x \le -2$, онда $F(x)=0;$

егер $-2 < x \le -1$, онда $F(x)=0{,}05;$

егер $-1 < x \le 1$, онда $F(x)=0{,}05+0{,}20=0{,}25;$

егер $1 < x \le 2$, онда $F(x)=0{,}05+0{,}20+0{,}30=0{,}55;$

егер $2 < x \le 4$, онда $F(x)=0{,}05+0{,}20+0{,}30+0{,}35=0{,}90;$

егер $x > 4$, онда $F(x)=0{,}05+0{,}20+0{,}30+0{,}35+0{,}10=1.$

Осыдан
$$F(x)=\begin{cases} 0, & \textit{егер} \quad x \le -2; \\ 0{,}05, & \textit{егер} \quad -2 < x \le -1; \\ 0{,}25, & \textit{егер} \quad -1 < x \le 1; \\ 0{,}55, & \textit{егер} \quad 1 < x \le 2; \\ 0{,}90, & \textit{егер} \quad 2 < x \le 4; \\ 1, & \textit{егер} \quad x > 4. \end{cases}$$

Дискретті кездейсоқ шамасының математикалық үміті

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$$

формуласымен анықталады. Осыдан

$$M(X)=-2\cdot 0{,}05-1\cdot 0{,}20+1\cdot 0{,}30+2\cdot 0{,}35+4\cdot 0{,}10=1{,}1.$$

Дискретті кездейсоқ шамасының дисперсиясы мен орта квадраттық ауытқуы

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2, \qquad \sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

формуласымен анықталады. Математикалық үміт алдыңғы есептен белгілі, ол $M(X)=1{,}1$ тең. Алдымен $M(X^2)$ мәнін табамыз

$$M(X^2)=x^2{}_1 p_1 + x^2{}_2 p_2 + \ldots + x^2{}_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x^2{}_i p_i .$$

$$M(X^2)=(-2)^2\cdot 0{,}05+(-1)^2\cdot 0{,}20+1^2\cdot 0{,}30+2^2\cdot 0{,}35+4^2\cdot 0{,}10=3{,}7.$$

Осыдан

$$D(X)=3{,}7-(1{,}1)^2=3{,}7-1{,}21=2{,}49,\ \ \sigma(X)=\sqrt{D(X)}=1{,}578.$$

X кездейсоқ шаманың мәндері $(\alpha;\beta)$ интервалына түсу ықтималдығы $P(\alpha\le X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)$ формуласымен анықталады.

Осыдан

$$P(2\le X<8)=F(8)-F(4)=1-0{,}55=0{,}45$$

2. Математикалық үміті $M(X)=1{,}7$ және дисперсиясы $D(X)=0.21$ ықтималдығы $P_1=0{,}3$ тең болатын X дискретті кездейсоқ шамасының x_1, x_2 екі мән қабылдайды, мұндағы $x_1<x_2$. Кездейсоқ шаманың үлестірім заңын жазу керек.

Шешуі. Үлестірім заңы

X	x_1	x_2
P	p_1	p_2

мұндағы $p_1+p_2=1$, осыдан $p_2=1-p_1=0{,}7.$ Математикалық үмітпен дисперсияның

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2,\ \ D(X)=x_1{}^2p_1+x_2{}^2p_2-M^2(X)$$

формулалары бойынша

$$\begin{cases}0{,}3x_1+0{,}7x_2=1{,}7\\ 0{,}3x_1{}^2+0{,}7x_2{}^2-1{,}7^2=0{,}21\end{cases} \text{ немесе } \begin{cases}3x_1+7x_2=17\\ 3x_1{}^2+7x_2{}^2=31\end{cases}$$

теңдеулер жүйесін қарастырамыз.

$$7x_2 = 17 - 3x_1 \qquad x_2 = \frac{17-3x_1}{7} \qquad 3x_1{}^2 + 7\cdot\left(\frac{17-3x_1}{7}\right)^2 = 31$$

$$3x_1{}^2 + \frac{289-102x_1+9x_1^2}{7} = 31 \qquad 21x_1{}^2 + 289 - 102x_1 + 9x_1^2 = 217$$

$$30x_1{}^2 - 102x_1 + 72 = 0 \qquad 5x_1{}^2 - 17x_1 + 12 = 0$$

$$x_1 = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 4\cdot 5\cdot 12}}{10} = \frac{17 \pm \sqrt{289-240}}{10} = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{10} = \frac{17 \pm 7}{10}$$

$$x_1 = \frac{17+7}{10} = 2{,}4 \quad x_2 = \frac{17-3\cdot 2{,}4}{7} = 1{,}4$$

немесе

$$x_1 = \frac{17-7}{10} = 1 \quad x_2 = \frac{17-3\cdot 1}{7} = 2$$

бірақ $x_1 < x_2$ болғандықтан

X	1	2
P	0,3	0,7

болады.

3. X кездейсоқ шамасының

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{(x+2)^2}{12} - \dfrac{1}{3}, & 0 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

интегралдық функциясы берілген. *f(x)* дифференциалдық функциясын, *M(X)* математикалық үмітін, *D(X)* дисперсиясын тауып, *X* кездейсоқ шаманың мәндері (-0,5; 1) интервалына түсу ықтималдығын табу керек.

Шешуі. Алдымен үлестірім тығыздығын табу керек.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \textit{егер} \quad x \le 0; \\ \dfrac{x+2}{6}, & \textit{егер} \quad 0 < x \le 2; \\ 0, & \textit{егер} \quad x > 2. \end{cases}$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^2 x \cdot \frac{x+2}{6}dx = \frac{1}{6}\int_0^2 (x^2 + 2x)dx = \frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Big|_0^2 = \frac{10}{9},$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f(x)dx-M^2(X)=\frac{1}{6}\int_0^2 x^2(x+2)dx-\left(\frac{10}{9}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2-\frac{100}{81}=\frac{26}{81},$$

$$P(-0{,}5<X<1)=F(1)-F(-0{,}5)=\left(\frac{(1+2)^2}{12}-\frac{1}{3}\right)-0=\frac{9}{12}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}.$$

4. X кездейсоқ шамасының

$$f(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x\le 1;\\ c\cdot\sqrt{x}, & егер \quad 0<x\le 4;\\ 0, & егер \quad x>4.\end{cases}$$

дифференциалдық функциясы берілген. Берілген кездейсоқ шаманың: Тұрақты c санын, $F(x)$ интегралдық функциясын, $M(X)$ математикалық үмітін, $D(X)$ дисперсиясын тауып, X кездейсоқ шаманың мәндері $(2;5)$ интервалына түсу ықтималдығын тау керек.
Шешуі. Үлестірім тығыздығының қасиеті бойынша

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1,$$

осыдан

$$\int_1^4 c\cdot\sqrt{x}dx=1 \qquad \int_1^4 c\cdot x^{1/2}dx=1 \qquad \frac{c\cdot x^{3/2}}{3/2}\Bigg|_1^4=1 \qquad \frac{2c\cdot(8-1)}{3}=1\Rightarrow\frac{2c}{3}\cdot 7=1$$

Сонымен $a=\frac{3}{14}$.
Яғни, үлестірім тығыздығы

$$f(x)=\begin{cases}0, & егер \quad x\le 1;\\ \dfrac{3\cdot\sqrt{x}}{14}, & егер \quad 0<x\le 4;\\ 0, & егер \quad x>4.\end{cases}$$

болады.

Енді $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$ формуласын қолданамыз.

Егер $x \le 1$ болса, онда $f(x) = 0$. Осыдан

$$F(x) = 0$$

болады.

Егер $1 < x \le 4$ болса, онда $f(x) = \frac{3 \cdot \sqrt{x}}{14}$. Олай болса

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0 \cdot dx + \int_{1}^{x} \frac{3 \cdot \sqrt{x}}{14} dx = \frac{x^{3/2}}{7}\Bigg|_{1}^{x} = \frac{x^{3/2} - 1}{12}.$$

Егер $x > 4$ болса, онда

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0 \cdot dx + \int_{1}^{4} \frac{3 \cdot \sqrt{x}}{14} dx + \int_{4}^{x} 0 \cdot dx = 1.$$

Сонымен

$$F(x) = \begin{cases} 0, & егер \quad x \le 1; \\ \frac{x^{3/2} - 1}{12}, & егер \quad 1 < x \le 4; \\ 1, & егер \quad x > 4. \end{cases}.$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{1}^{4} x \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{x}}{14} dx = \frac{3}{14}\int_{1}^{4} x^{3/2} dx = \frac{3}{14} \frac{x^{5/2}}{5/2}\Bigg|_{1}^{4} = \frac{3}{35}(32 - 1) = \frac{93}{35}.$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - M(X) = \int_{1}^{4} x^2 \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{x}}{14} dx - \left(\frac{93}{35}\right)^2 = \frac{3}{14}\int_{0}^{2} x^{5/2} dx - \frac{8649}{1225} =$$

$$= \frac{3}{14} \frac{x^{7/2}}{7/2}\Bigg|_{0}^{2} - \frac{8649}{1225} = \frac{3}{49}(128 - 1) - \frac{8649}{1225} = \frac{381}{49} - \frac{8649}{1225} = \frac{9525 - 8649}{1225} = \frac{876}{1225}.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{876}{1225}} = \frac{2 \cdot \sqrt{219}}{35}.$$

$$P(2 < X < 5) = F(5) - F(2) = 1 - \frac{1}{7}\left(5^{3/2} - 1\right) = 1 - 0{,}454 = 0{,}546.$$

5. Математикалық үміті $a = 70$ және орта квадраттық ауытқуы $\sigma = 10$ тең болатын X кездейсоқ шамасының бірқалыпты үлестіру заңының $(50;80)$ аралығына түсу ықтималдығын табу керек.

Шешуі.

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

формуласын қолданамыз. Есептің шарты бойынша

$$\alpha = 50 \qquad \beta = 80 \qquad a = 70 \qquad \sigma = 10,$$

болғандықтан

$$P(50 < X < 80) = \Phi\left(\frac{80 - 70}{10}\right) - \Phi\left(\frac{50 - 70}{10}\right) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2)$$

Кесте бойынша (2-қосымшаны қараңыз):

$$\Phi(2) = 0{,}4772, \ \Phi(1) = 0{,}3413.$$

$$P(50 < X < 80) = 0{,}3413 + 0{,}4772 = 0{,}8185.$$