БІЛІМ АЛУШЫНЫҢ ӨЗДІК ЖҰМЫСЫНЫҢ ТАПСЫРМАЛАРЫ №5

5. Функциялық қатар тақырыбына арналған типтік есептер

1. Дәрежелік қатардың $\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$ жинақты облысын табу керек.

1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n (n+1)}$	2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n \sqrt{n+1}}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^n}{3^n \sqrt{n+1}}$	4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+4}$	6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{7^n \sqrt[3]{n}}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{3n-2}}$	8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n+1)^n}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 4^{n-1}}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 8^n}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 2^n}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^n$
15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} x^n$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n x^n}{3^n \cdot n!}$
17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{5^n} x^n$	18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+2)^n}{n+1} x^n$
19	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+1)}{n} x^n$	20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{n+2} x^n$
21	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n (n+1)} x^n$	22	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{3^n \sqrt[4]{n}}$
23	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n x^n}{5^n \sqrt[3]{n}}$	24	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{4^n \sqrt[5]{n}}$

25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{2^n\sqrt[4]{n}}$	26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^n}{3^n\sqrt[3]{n}}$
27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{3^n\sqrt[5]{n}}$	28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{6^n\sqrt{n}}$
29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{5^n\sqrt[6]{n}}$	30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{7^n\sqrt[3]{n}}$

2. Тейлор қатарының көмегімен келесі анықталған интегралды 0,001 дәлдіктермен есептеу керек.

1	$\int_0^{0.25}\ln(1+\sqrt{x})dx$	2	$\int_0^{1} arctg(\frac{x^2}{2})dx$
3	$\int_0^{0.2}\sqrt{x}\cdot e^{-x}dx$	4	$\int_0^{0.5}\frac{arctgx}{x}dx$
5	$\int_0^{0.2}\sqrt{x}\cos x dx$	6	$\int_0^{0.5}\ln(1+x^3)dx$
7	$\int_0^{1}x^2\sin x dx$	8	$\int_0^{1}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$
9	$\int_0^{0.5}\sqrt{1+x^2}dx$	10	$\int_0^{0.5}\frac{dx}{1+x^5}$
11	$\int_0^{1}\sqrt[3]{1+\frac{x^2}{4}}dx$	12	$\int_0^{0.5}\frac{\sin x^2}{x}dx$
13	$\int_0^{0.1}\frac{e^x-1}{x}dx$	14	$\int_0^{0.5}x^2\cos 3x dx$
15	$\int_0^{0.5}\ln(1+x^2)dx$	16	$\int_0^{0.4}\sqrt{x}e^{-\frac{x}{4}}dx$
17	$\int_{0.3}^{0.5}\frac{1+\cos x}{x^2}dx$	18	$\int_0^{0.5}\frac{arctgx^2}{x^2}dx$

19	$\int_0^{0.8} \frac{1-\cos x}{x} dx$	20	$\int_0^1 \sin x^2 dx$
21	$\int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$	22	$\int_0^1 \cos\sqrt[3]{x} dx$
23	$\int_0^1 \sqrt{x} \sin x dx$	24	$\int_0^{2,5} \frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}} dx$
25	$\int_0^1 \cos\frac{x^2}{4} dx$	26	$\int_0^1 arctg\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) dx$
27	$\int_0^{0.5} \frac{x-arctgx}{x^2} dx$	28	$\int_0^{0.4} \sqrt{1-x^3} dx$
29	$\int_0^{0.5} e^{-x^2} dx$	30	$\int_0^{0.5} \sqrt{1+x^3} dx$

3. $(-\pi;\pi)$ аралығында $f(x) = ax + b$ функциясын Фурье қатарына жіктеу керек.

№	*a*	*b*	№	*a*	*b*
1	4	1	2	3	2
3	6	3	4	2	-1
5	5	-2	6	-4	-3
7	2	-3	8	5	1
9	4	-1	10	-5	2
11	6	-2	12	3	3
13	5	-1	14	2	3
15	6	1	16	3	-2
17	4	-3	18	1	2
19	5	2	20	-4	-3
21	2	3	22	3	1
23	6	-1	24	4	-2
25	-5	-1	26	4	2
27	-6	-2	28	-1	-3

29	2	1	30	6	3

Тапсырмаларды шығару жолы

1. Дәрежелік қатардың $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{\sqrt{n}}$ жинақталу облысын табу керек.

Шешуі:

$$a_n = \frac{3^n}{\sqrt{n}}; \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}};$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^n}{\sqrt{n}} : \frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3\sqrt{n}} = \frac{1}{3},$$

яғни $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ жинақталу интервалы болады. Енді интервалдың шекаралық нүктелерінде қатардың жинақтылығын зерттейік:

$x = \frac{1}{3}$ болса, онда

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

қатар жинақсыз (Дирхле қатары, $p = 0{,}5 < 1$).

$x = -\frac{1}{3}$ болса, онда

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

қатар жинақты, себебі

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

және

$$1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \ldots$$

Лейбниц белгісі орындалады.

Сонымен, жинақталу облысы $-\frac{1}{3} \le x < \frac{1}{3}$ болады.

2. Тейлор қатарының көмегімен $\int_0^1 x \sin x^2 dx$ анықталған интегралды 0,001 дәлдіктермен есептеу керек.

Шешуі: $y = \sin x$ функциясының

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

жіктелуін пайдалана отырып, x - тің орнына $(-x^2)$-ті ауыстырсақ, онда

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots$$

болады. Осыдан $x \sin x^2 = x^3 - \frac{x^7}{3!} + \frac{x^{11}}{5!} - \frac{x^{15}}{7!} + \ldots$ қатарын аламыз. Осыдан

$$\int_0^1 x \sin x^2 dx = \int_0^1 \left(x^3 - \frac{x^7}{3!} + \frac{x^{11}}{5!} - \frac{x^{15}}{7!} + \ldots \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^8}{3! \cdot 8} + \frac{x^{12}}{5! \cdot 12} - \frac{x^{16}}{7! \cdot 16} + \ldots \right) \Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3! \cdot 8} + \frac{1}{5! \cdot 12} - \frac{1}{7! \cdot 16} + \ldots = \frac{1}{4} - \frac{1}{48} + \frac{1}{1440} - \frac{1}{80640} + \ldots$$

Үшінші мүшесі 0,001 санынан кіші болғандықтан, алғашқы үш мүшесін алсақ жеткілікті

$$\int_0^1 x \sin x^2 dx \approx 0{,}25 - 0{,}0208 + 0{,}0007 = 0{,}2299 \approx 0{,}230.$$

3. $[-\pi; \pi]$ аралығында $f(x) = 4x + 7$ функциясын Фурье қатарына жіктеу керек.

Шешуі:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (4x + 7) dx = \frac{1}{\pi} \left(2x^2 + 7x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 14.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(4x+7)\cos nx\,dx = \left|\begin{matrix} u = 4x+7 & du = 4dx \\ dv = \cos nx & v = \dfrac{\sin nx}{n}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(4x+7)\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(4x+7)\sin nx\,dx = \left|\begin{matrix} u = 4x+7 & du = 4dx \\ dv = \sin nx & v = -\dfrac{\cos nx}{n}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-(4x+7)\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-(4\pi+7)\frac{\cos \pi n}{n} + (-4\pi+7)\frac{\cos(-\pi n)}{n} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] = \left(-1^{n+1}\right)\frac{8}{n}.$$

Осыдан

$$f(x) = 7 + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin nx.$$