БІЛІМ АЛУШЫНЫҢ ӨЗДІК ЖҰМЫСЫНЫҢ ТАПСЫРМАЛАРЫ №4

4. Сандық қатар тақырыбына арналған типтік есептер

1. Даламбер белгісі бойынша берілген қатарлардың жинақтылығын зерттеу керек.

1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^5}$	2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+3}}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)!}$	4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5^n}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$	6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$	8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)\cdot 5^n}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{\frac{n}{2}}}{n!}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)(n+2)}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{7^n}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$
15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$
17	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}$	18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)!}{n^5}$
19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+1}{5^n(n+1)!}$	20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n!}$
21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n(2n-1)}$	22	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)!}{n^5}$

23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n-1}{5^n(n+1)!}$	24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n(n+1)}{5^n}$
25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}$	26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n\cdot 2^n}}$
27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{4n!}$	28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{n\cdot 7^n}}$
29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+3)!}$	30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n!}$

2. Кошидің радикалдық белгісі бойынша берілген қатарлардың жинақтылығын зерттеу керек.

1	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{3n+7}\right)^n$	2	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+7}\right)^n$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{3n+4}\right)^n$	4	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{4n+6}\right)^n$
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+3}\right)^n$	6	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+4}{n+2}\right)^n$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{4n}\right)^n$	8	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{3n+7}\right)^n$
9	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n$	10	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{5n+4}\right)^n$
11	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+2}{3n+7}\right)^n$	12	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+7}{5n+4}\right)^n$
13	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{5n+4}\right)^n$	14	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n$
15	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{7n+5}\right)^n$	16	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+7}{n+3}\right)^n$

17	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{5n+8}\right)^n$	18	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+4}{5n+6}\right)^n$
19	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+6}{3n+5}\right)^n$	20	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+5}{6n+7}\right)^n$
21	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+5}{7n+4}\right)^n$	22	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+5}{4n+7}\right)^n$
23	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+6}{7n+8}\right)^n$	24	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+8}{5n+7}\right)^n$
25	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+5}{8n+6}\right)^n$	26	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{6n+9}\right)^n$
27	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+8}{6n+9}\right)^n$	28	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8n+6}{9n+7}\right)^n$
29	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+6}{9n+8}\right)^n$	30	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+7}{8n+9}\right)^n$

3. Кошидің интегралдық белгісі бойынша берілген қатарлардың жинақтылығын зерттеу керек.

1	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{24}{9n^2-28n-5}$	2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2-21n-8}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-14n-45}$	4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-7n-12}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-14n-48}$	6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{9n^2+12n-5}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2-6n-8}$	8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-8n+3}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2+3n-2}$	10	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+2}$

11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{36n^2-24n-5}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+3n-20}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2-8n-15}$
15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2+5n-6}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-35n-6}$
17	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{36n^2+12n-35}$	18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2-3n-2}$
19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2+8n-15}$	20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{36n^2-12n-35}$
21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{4n^2-9}$	22	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{4n^2-56n-33}$
23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-70n-24}$	24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-8n+3}$
25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-42n-40}$	26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2-21n-8}$
27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5n^2+12n-9}$	28	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{6}{8n^2-28n-9}$
29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3n^2-8n+4}$	30	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{24}{5n^2-28n-9}$

4.

Таңбалары ауыспалы қатардың жинақтылығын зерттеу керек. Жинақты болған жағдайда, оның абсолютті немесе шартты жинақты болатындығын зерттеу керек.

1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4}$	2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+9}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{\sqrt{n^2+1}}$	4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+4}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$	6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+4}}$

7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n+1}$	8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+4}}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^3}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{\sqrt{n+4}}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{\sqrt{n^2+1}}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+4}$
15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{\sqrt{n^2+9}}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+4)^2}$
17	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+9}$	18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n+4}$
19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+4)^2}$	20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$
21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n+9}$	22	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+9}}$
23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$	24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+9}$
25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+1}$	26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+9)^2}$
27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{\sqrt{n^2+4}}$	28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{\sqrt{n^2+9}}$
29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{\sqrt{n+1}}$	30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+9)^3}$

Тапсырмаларды шығару жолы

1. Даламбер белгісі бойынша $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.

Шешуі: Қатардың жалпы мүшесі

$$a_n = \frac{7^{3n}}{(2n-5)!},$$

$$a_{n+1} = \frac{7^{3n+3}}{(2n-3)!}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{7^{3n+3}\cdot(2n-5)!}{(2n-3)!\cdot 7^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7^3}{(2n-3)(2n-4)} = 0.$$

Демек $l<1$ болғандықтан қатар жинақты.

2. Кошидің радикалдық белгісі бойынша $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+7}{9n+6}\right)^n$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.
Шешуі: Қатардың жалпы мүшесі

$$a_n = \left(\frac{2n+7}{9n+6}\right)^n,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+7}{9n+6}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+7}{9n+6} = \frac{2}{9}.$$

Демек $l<1$ болғандықтан қатар жинақты.

3. Кошидің радикалдық белгісі бойынша $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{20}{4n^2-16n-9}$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек.
Шешуі: Қатардың жалпы мүшесі

$$a_n = \frac{20}{4n^2-16n-9}, \qquad f(x) = \frac{20}{4x^2-16x-9}$$

Кошидің интегралдық белгісі бойынша:

$$\int_1^{\infty} \frac{20\,dx}{4x^2-16x-9} = 5\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x-2.25} = 5\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x-2)^2-(2.5)^2} = \frac{1}{2\cdot 2.5}\ln\left|\frac{x-2-2.5}{x-2+2.5}\right|\Bigg|_1^{\infty} = \ln 1 - \ln\frac{7}{3} = \ln\frac{3}{7}$$

меншікшіз интегралы жинақты, олай болса берілген қатар да жинақты болады.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n^2}{n^3+1}$ қатарының жинақтылығын зерттеу керек. Жинақты болған жағдайда, оның абсолютті немесе шартты жинақты болатындығын зерттеу керек.

Шешуі: Қатардың жалпы мүшесі

$$u_n=\frac{n^2}{n^3+1}.$$

Лейбниц белгісін қолданайық:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+1}=0,$$

$$u_1=\frac{1}{2}>u_2=\frac{4}{9}>u_3=\frac{9}{28}>u_4=\frac{16}{65}\ldots.$$

Олай болса, қатар жинақты.

Енді мүшелерінің абсолют мәні арқылы алынған $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$ қатарын қарастырайық. Бұл қатардың жинақтылығын Кошидің интегралдық белгісі бойынша тексерейік.

$$u_n=\frac{n^2}{n^3+1}\qquad f(x)=\frac{x^2}{x^3+1}$$

$$\int_1^{\infty}\frac{x^2\,dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int_1^{\infty}\frac{d\left(x^3+1\right)}{x^3+1}=\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|\Big|_1^{\infty}=\infty.$$

Меншіксіз интеграл жинақсыз болғандықтан, мүшелерінің абсолют шамасы бойынша алынған қатарда жинақсыз. Олай болса, берілген қатар шартты жинақты болады.