БІЛІМ АЛУШЫНЫҢ ӨЗДІК ЖҰМЫСЫНЫҢ ТАПСЫРМАЛАРЫ №3

3. Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер тақырыбына арналған типтік есептер

1. Дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

1	$y'' = \cos 2x$	2	$y'' = e^{4x}$
3	$y'' = \sin 3x$	4	$y'' = x^2 + 2x + 1$
5	$y'' = \sqrt{2x-1}$	6	$y'' = \cos\frac{x}{2}$
7	$y'' = e^{5x}$	8	$y'' = \sin\frac{3x}{7}$
9	$y'' = \sqrt{5-4x}$	10	$y'' = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$
11	$y'' = \cos 3x$	12	$y'' = e^{2x/5}$
13	$y'' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$	14	$y'' = x^2\sqrt{x}$
15	$y'' = e^{-7x}$	16	$y'' = \cos\frac{x}{3}$
17	$y'' = \sin 7x$	18	$y'' = \sqrt{3x+4}$
19	$y'' = \sqrt[3]{1-x}$	20	$y'' = x^3\sqrt{x}$
21	$y'' = \cos 4x$	22	$y'' = e^{-2x}$
23	$y'' = \sin(1-x)$	24	$y'' = \sqrt[3]{x^2}$
25	$y'' = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$	26	$y'' = e^{x/3}$
27	$y'' = \sin 4x$	28	$y'' = \sqrt{1-3x}$
29	$y'' = \frac{1}{\sqrt{3x+4}}$	30	$y'' = \cos(1-2x)$

2. Дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

1	$xy'' = 3y'$	2	$xy'' + 4y' = 0$

3	$xy'' = 5y'$	4	$xy'' + 6y' = 0$
5	$xy'' = 7y'$	6	$xy'' + 2y' = 0$
7	$2xy'' = y'$	8	$3xy'' + y' = 0$
9	$4xy'' = y'$	10	$5xy'' + y' = 0$
11	$3xy'' + 2y' = 0$	12	$3xy'' = 4y'$
13	$5xy'' + 2y' = 0$	14	$5xy'' = 3y'$
15	$5xy'' + 4y' = 0$	16	$xy'' + 3y' = 0$
17	$xy'' = 4y'$	18	$xy'' + 5y' = 0$
19	$xy'' = 6y'$	20	$xy'' + 7y' = 0$
21	$xy'' = 2y'$	22	$2xy'' + y' = 0$
23	$3xy'' = y'$	24	$4xy'' + y' = 0$
25	$4xy'' + 3y' = 0$	26	$3xy'' = 2y'$
27	$5xy'' + y' = 0$	28	$2xy'' = 5y'$
29	$5xy'' + 3y' = 0$	30	$4xy'' = 5y'$

3. Дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

1	$yy'' + 4y'^2 = 0$	2	$yy'' = 5y'^2$
3	$yy'' + 6y'^2 = 0$	4	$yy'' = 3y'^2$
5	$yy'' + 2y'^2 = 0$	6	$yy'' = 7y'^2$
7	$2yy'' = y'^2$	8	$3yy'' + y'^2 = 0$
9	$4yy'' = y'^2$	10	$5yy'' + y'^2 = 0$
11	$yy'' = 4y'^2$	12	$3yy'' + 2y'^2 = 0$
13	$yy'' = 6y'^2$	14	$5yy'' + 2y'^2 = 0$
15	$yy'' = 2y'^2$	16	$5yy'' + 4y'^2 = 0$
17	$yy'' + 3y'^2 = 0$	18	$4yy'' = 3y'^2$
19	$yy'' + 5y'^2 = 0$	20	$5yy'' + 3y'^2 = 0$
21	$yy'' + 7y'^2 = 0$	22	$5yy'' = 3y'^2$
23	$2yy'' + y'^2 = 0$	24	$3yy'' = 2y'^2$
25	$4yy'' + 3y'^2 = 0$	26	$4yy'' + y'^2 = 0$
27	$5yy'' = 2y'^2$	28	$5yy'' + y'^2 = 0$
29	$5yy'' = 4y'^2$	30	$5yy'' + 6y'^2 = 0$

4. Коэффициенттері тұрақты екінші ретті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеулерінің жалпы шешімін табу керек.

1	а) $y''-y'-12y=0$ ә) $y''-8y'+16y=0$ б) $y''-2y'+37y=0$	в) $y''-7y'=0$ г) $y''+25y=0$ ғ) $y''-16y=0$
2	а) $y''-10y'+24y=0$ ә) $y''+12y'+36y=0$ б) $y''+4y'+29y=0$	в) $y''-2y'=0$ г) $25y''+4y=0$ ғ) $y''-49y=0$
3	а) $y''-3y'-40y=0$ ә) $4y''-4y'+y=0$ б) $y''-6y'+10y=0$	в) $y''-3y'=0$ г) $36y''+y=0$ ғ) $y''-25y=0$
4	а) $y''+y'-42y=0$ ә) $y''+16y'+64y=0$ б) $y''+8y'+41y=0$	в) $y''+13y'=0$ г) $y''+49y=0$ ғ) $y''-26y=0$
5	а) $y''+16y'+63y=0$ ә) $9y''+6y'+y=0$ б) $y''-10y'+61y=0$	в) $y''+2y'=0$ г) $4y''+y=0$ ғ) $y''-4y=0$
6	а) $y''-9y'+18y=0$ ә) $y''-10y'+25y=0$ б) $y''+12y'+45y=0$	в) $y''-3y'=0$ г) $25y''+9y=0$ ғ) $y''-36y=0$
7	а) $y''+9y'+20y=0$ ә) $9y''+12y'+4y=0$ б) $y''+2y'+17y=0$	в) $y''+y'=0$ г) $y''+36y=0$ ғ) $y''-20y=0$
8	а) $y''+2y'-35y=0$ ә) $y''+18y'+81y=0$ б) $y''-4y'+5y=0$	в) $y''+12y'=0$ г) $9y''+4y=0$ ғ) $y''-34y=0$
9	а) $y''+15y'+54y=0$ ә) $16y''-8y'+y=0$ б) $y''+6y'+25y=0$	в) $y''+3y'=0$ г) $16y''+y=0$ ғ) $y''-52y=0$
10	а) $y''-15y'+56y=0$ ә) $y''-14y'+49y=0$ б) $y''-8y'+25y=0$	в) $y''-y'=0$ г) $y''+81y=0$ ғ) $y''-5y=0$
11	а) $y''+8y'+15y=0$	в) $y''+2y'=0$

	ə) $16y''-24y'+9y=0$ б) $y''+10y'+29y=0$	г) $16y''+9y=0$ ғ) $y''-13y=0$
12	а) $y''+3y'-28y=0$ ə) $64y''-16y'+y=0$ б) $y''-12y'+37y=0$	в) $y''+11y'=0$ г) $y''+16y=0$ ғ) $y''-63y=0$
13	а) $y''-y'-30y=0$ ə) $y''-16y'+64y=0$ б) $y''+2y'+10y=0$	в) $y''-11y'=0$ г) $y''+12y=0$ ғ) $y''-32y=0$
14	а) $y''-14y'+48y=0$ ə) $25y''+10y'+y=0$ б) $y''-4y'+20y=0$	в) $y''-12y'=0$ г) $y''+7y=0$ ғ) $y''-26y=0$
15	а) $y''-3y'-70y=0$ ə) $49y''-14y'+y=0$ б) $y''+6y'+45y=0$	в) $y''-17y'=0$ г) $y''+5y=0$ ғ) $y''-64y=0$
16	а) $y''-7y'+12y=0$ ə) $y''+10y'+25y=0$ б) $y''-8y'+17y=0$	в) $y''-8y'=0$ г) $y''+16y=0$ ғ) $y''-7y=0$
17	а) $y''-2y'-24y=0$ ə) $25y''+20y'+4y=0$ б) $y''+10y'+41y=0$	в) $y''-10y'=0$ г) $y''+36y=0$ ғ) $y''-25y=0$
18	а) $y''-3y'-40y=0$ ə) $36y''-12y'+y=0$ б) $y''-12y'+40y=0$	в) $y''-3y'=0$ г) $y''+81y=0$ ғ) $y''-10y=0$
19	а) $y''+13y'+42y=0$ ə) $y''+14y'+49y=0$ б) $y''-2y'+26y=0$	в) $y''+5y'=0$ г) $y''+64y=0$ ғ) $y''-41y=0$
20	а) $y''+2y'-63y=0$ ə) $4y''+4y'+y=0$ б) $y''+4y'+40y=0$	в) $y''+16y'=0$ г) $y''+10y=0$ ғ) $y''-20y=0$
21	а) $y''-3y'-18y=0$ ə) $25y''+30y'+9y=0$ б) $y''-6y'+34y=0$	в) $y''-9y'=0$ г) $y''+25y=0$ ғ) $y''-45y=0$
22	а) $y''+y'-20y=0$ ə) $y''-12y'+36y=0$ б) $y''+8y'+20y=0$	в) $y''-9y'=0$ г) $9y''+49y=0$ ғ) $y''-17y=0$

23	а) $y''+12y'+35y=0$ ә) $9y''-12y'+4y=0$ б) $y''-10y'+34y=0$	в) $y''+12y'=0$ г) $y''+81y=0$ ғ) $y''-23y=0$
24	а) $y''+3y'-54y=0$ ә) $16y''+8y'+y=0$ б) $y''+12y'+52y=0$	в) $y''+15y'=0$ г) $16y''+y=0$ ғ) $y''-24y=0$
25	а) $y''-y'-56y=0$ ә) $y''-18y'+81y=0$ б) $y''+2y'+5y=0$	в) $y''-15y'=0$ г) $y''+49y=0$ ғ) $y''-25y=0$
26	а) $y''+2y'-15y=0$ ә) $16y''+24y'+9y=0$ б) $y''-4y'+13y=0$	в) $y''+8y'=0$ г) $y''+26y=0$ ғ) $y''-49y=0$
27	а) $y''+11y'+28y=0$ ә) $y''+8y'+16y=0$ б) $y''+6y'+13y=0$	в) $y''+3y'=0$ г) $64y''+y=0$ ғ) $y''-37y=0$
28	а) $y''-11y'+30y=0$ ә) $9y''-6y'+y=0$ б) $y''-8y'+52y=0$	в) $y''-9y'=0$ г) $y''+64y=0$ ғ) $y''-10y=0$
29	а) $y''-2y'-48y=0$ ә) $25y''-10y'+y=0$ б) $y''+10y'+26y=0$	в) $y''-14y'=0$ г) $y''+5y=0$ ғ) $y''-5y=0$
30	а) $y''-17y'+70y=0$ ә) $36y''-12y'+y=0$ б) $y''-12y'+61y=0$	в) $y''+30y'=0$ г) $y''+30y=0$ ғ) $y''-30y=0$

5. Алғашқы шарттарды қанағаттандыратын коэффициенттері тұрақты екінші ретті біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеулерінің дербес шешімін табу керек.

1	$y''-4y'+3y=e^{2x}$	$y(0)=0,\ y'(0)=1$
2	$y''+y'-2y=2\cos x$	$y(0)=1,\ y'(0)=2$
3	$y''-4y'+4y=2x+1$	$y(0)=2,\ y'(0)=1$
4	$y''+4y=2e^{-2x}$	$y(0)=0,\ y'(0)=0$
5	$y''-2y'+y=x^2+2$	$y(0)=1,\ y'(0)=3$
6	$y''-6y'+9y=3\sin 2x$	$y(0)=1,\ y'(0)=0$

7	$y''+4y'+4y=3e^{x}$	$y(0)=1,\ y'(0)=2$
8	$y''+4y'=2x-3$	$y(0)=1,\ y'(0)=2$
9	$y''+y'=2\cos x+\sin x$	$y(0)=1,\ y'(0)=0$
10	$y''+6y'+9y=2e^{2x}$	$y(0)=2, y'(0)=1$
11	$y''+16y=x^{2}+2x-3$	$y(0)=1,\ y'(0)=0$
12	$y''-7y'+12y=7\cos 3x$	$y(0)=1,\ y'(0)=3$
13	$y''-8y'+15y=5x-4$	$y(0)=1,\ y'(0)=1$
14	$y''+7y'=3x+2$	$y(0)=1,\ y'(0)=2$
15	$y''+8y'+16y=x^{2}+3x-2$	$y(0)=1,\ y'(0)=1$
16	$y''-5y'=3e^{2x}$	$y(0)=1,\ y'(0)=0$
17	$y''-6y'+5y=2x^{2}-5$	$y(0)=0,\ y'(0)=1$
18	$y''-8y'+16y=3x^{2}+2x$	$y(0)=1,\ y'(0)=2$
19	$y''+6y'+8y=2-x^{2}$	$y(0)=1,\ y'(0)=0$
20	$y''-6y'+8y=4-x^{2}$	$y(0)=1,\ y'(0)=1$
21	$y''+25y=5e^{2x}$	$y(0)=2,\ y'(0)=1$
22	$y''+6y'+5y=2\cos 3x$	$y(0)=1,\ y'(0)=1$
23	$y''-3y'=2e^{3x}$	$y(0)=1,\ y(0)=0$
24	$y''-9y=3\cos x+2\sin x$	$y(0)=0,\ y'(0)=0$
25	$y''-6y'+5y=3x^{2}+4x-1$	$y(0)=0,\ y'(0)=0$
26	$y''-6y'=2x+6$	$y(0)=1,\ y(0)=1$
27	$y''+4y'+3y=4e^{2x}$	$y(0)=1, y'(0)=0$
28	$y''-3y=5x-x^{2}$	$y(0)=0,\ y'(0)=2$
29	$y''+4y'-5y=2\sin 3x$	$y(0)=0,\ y'(0)=0$
30	$y''-4y'=3x+6$	$y(0)=1,\ y'(0)=1$

6. Дифференциалдық теңдеулерінің жүйесінің жалпы шешімін табу керек.

1	$\begin{cases} y'=9y-7z \\ z'=3y-\ z \end{cases}$	2	$\begin{cases} y'=y-4z \\ z'=2y+7z \end{cases}$
3	$\begin{cases} y'=12y+11z \\ z'=\ 5y-3z \end{cases}$	4	$\begin{cases} y'=3y+4z \\ z'=6y+5z \end{cases}$

5	$\begin{cases} y' = 9y + 11z \\ z' = y - z \end{cases}$	6	$\begin{cases} y' = 2y + 4z \\ z' = 9y + 6z \end{cases}$
7	$\begin{cases} y' = 10y - 8z \\ z' = 4y - 2z \end{cases}$	8	$\begin{cases} y' = 11y - 8z \\ z' = 6y - 3z \end{cases}$
9	$\begin{cases} y' = 9y - 4z \\ z' = 4y - 1z \end{cases}$	10	$\begin{cases} y' = 12y - 7z \\ z' = 5y - 3z \end{cases}$
11	$\begin{cases} y' = 2y + 5z \\ z' = 4y + 6z \end{cases}$	12	$\begin{cases} y' = y + 5z \\ z' = 8y + 7z \end{cases}$
13	$\begin{cases} y' = 3y + 3z \\ z' = y + 5z \end{cases}$	14	$\begin{cases} y' = 10y - 7z \\ z' = 3y - 2z \end{cases}$
15	$\begin{cases} y' = 2y + 5z \\ z' = y + 6z \end{cases}$	16	$\begin{cases} y' = 11y - 4z \\ z' = 6y - 3z \end{cases}$
17	$\begin{cases} y' = 12y - 7z \\ z' = 4y - 3z \end{cases}$	18	$\begin{cases} y' = 12y - 5z \\ z' = 3y - 3z \end{cases}$
19	$\begin{cases} y' = 11y - 9z \\ z' = 5y - 3z \end{cases}$	20	$\begin{cases} y' = 9y - 4z \\ z' = 6y - z \end{cases}$
21	$\begin{cases} y' = 10y - 9z \\ z' = 3y - 2z \end{cases}$	22	$\begin{cases} y' = y + 4z \\ z' = 4y + 7z \end{cases}$
23	$\begin{cases} y' = 3y + 3z \\ z' = 7y + 5z \end{cases}$	24	$\begin{cases} y' = 9y + 6z \\ z' = 4y - 1z \end{cases}$
25	$\begin{cases} y' = 12y - 15z \\ z' = 4y - 4z \end{cases}$	26	$\begin{cases} y' = 2y - 3z \\ z' = y + 6z \end{cases}$
27	$\begin{cases} y' = 3y + 4z \\ z' = 2y + 5z \end{cases}$	28	$\begin{cases} y' = 2y + 7z \\ z' = 3y + 6z \end{cases}$
29	$\begin{cases} y' = y + 9z \\ z' = 3y + 7z \end{cases}$	30	$\begin{cases} y' = 3y + 8z \\ z' = 6y + 5z \end{cases}$

Тапсырмаларды шығару жолы

1. $y'' = \sin 4x$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі: Бұл теңдеудің жалпы шешімі екі рет интегралдау арқылы табылады.

$$y' = \int \sin 4x\, dx + C_1 = -\frac{1}{4}\cos 4x + C_1,$$

$$y = -\frac{1}{4}\int (\cos 4x + C_1)\, dx + C_2 = -\frac{1}{16}\sin 4x + C_1 x + C_2.$$

$y = -\frac{1}{16}\sin 4x + C_1 x + C_2$ теңдеудің жалпы шешімі.

2. $y'' - \frac{y'}{x} = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі: Бұл теңдеудің құрамында y жоқ. Олай болса теңдеудің ретін төмендету үшін $y' = z(x),\ y'' = z'$ жаңа ауыстырылу жасалынады. Сонда

$$z' - \frac{z}{x} = 0$$

теңдеуінің шешімі

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = 0;$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x};$$

$$\ln z = \ln x + \ln C_1$$

$$z = C_1 x$$

немесе

$$y' = z(x),\ \ y = \int C_1 x\, dx + C_2,$$

$y = \frac{C_1 x^2}{2} + C_2$ берілген теңдеудің жалпы шешімі.

3. $y \cdot y'' = y'^2$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі: Бұл теңдеудің құрамында x жоқ. Олай болса теңдеудің ретін төмендету үшін $y' = p(y),\ \ y'' = p\dfrac{d\,p}{d\,y}$ жаңа ауыстырылу жасалынады. Сонда

$$y \cdot p\frac{d\,p}{d\,y} = p^2$$

осыдан $p = 0,\ y = const$ немесе

$$y \cdot \frac{d\,p}{d\,y} = p;$$

$$\frac{d\,p}{p} = \frac{d\,y}{y};$$

$$\ln p = \ln y + \ln C_1;$$

$$p = C_1 \cdot y;$$

$$y' = C_1\,y$$

$$\frac{d\,y}{y} = C_1\,d\,x;$$

$$\ln y = C_1\,x + \ln C_2.$$

Осыдан $y = C_2\,e^{C_1 x}$ берілген теңдеудің жалпы шешімі.

4. Коэффициенттері тұрақты екінші ретті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеулерінің жалпы шешімін табу керек.

а) $y'' - y' - 2\,y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі: Сипаттамалық теңдеуі

$$k^2 - k - 2 = 0$$

болады, ал оның шешімі $k_1 = 2 \neq k_2 = -1$ болғандықтан

$$y = C_1\,e^{2x} + C_2\ e^{-x}$$

берілген теңдеудің жалпы шешімі.

ә) $y'' - 20y' + 100y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.
Шешуі: Сипаттамалық теңдеуі

$$k^2 - 20k + 100 = 0$$

болады, ал оның шешімі $k_{1,2} = 10$ (екі еселі түбір), олай болса

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{10x}$$

берілген теңдеудің жалпы шешімі.

б) $y'' + 6y' + 25y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.
Шешуі: Сипаттамалық теңдеуі

$$k^2 + 6k + 25 = 0$$

болады, ал оның шешімі $k_{1,2} = -3 \pm 4i.$ Олай болса

$$y = e^{-3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$$

берілген теңдеудің жалпы шешімі.

в) $y'' + 31y' = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.
Шешуі: Сипаттамалық теңдеуі

$$k^2 + 31k = 0$$

болады, ал оның шешімі $k_1 = 0 \neq k_2 = -31.$ Олай болса

$$y = C_1 + C_2\, e^{-31x}$$

берілген теңдеудің жалпы шешімі.

г) $y'' + 100y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.
Шешуі: Сипаттамалық теңдеуі

$$k^2+100=0,\quad k^2=-100$$

болады, ал оның шешімі $k_{1,2}=\pm 10i.$ Олай болса

$$y=C_1\cos 10x+C_2\sin 10x$$

берілген теңдеудің жалпы шешімі.

ғ) $y''-100y=0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.
Шешуі: Сипаттамалық теңдеуі

$$k^2-100=0,\quad k^2=100$$

болады, ал оның шешімі $k_{1,2}=\pm 10.$ Олай болса

$$y=C_1e^{10x}+C_2e^{-10x}$$

берілген теңдеудің жалпы шешімі.

5. $y''+2y'-3y=xe^{4x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$ теңдеуінің дербес шешімін табу керек.
Шешуі: Алдымен берілген теңдеудің жалпы шешімін табу керек. Берілген теңдеуінің жалпы шешімі

$$y=\bar{y}+\tilde{y}$$

түрінде ізделінеді. Сипаттамалық теңдеуі

$$k^2+2k-3=0.$$

Сипаттамалық теңдеуінің шешімі $k_1=1,\ k_2=-3.$ Олай болса біртекті теңдеудің жалпы шешімі

$$\bar{y}=C_1e^{x}+C_2e^{-3x}.$$

$f(x)=xe^{4x}=e^{\alpha x}P_n(x),\ \alpha=4,\ \ n=1$ болғандықтан

$$\alpha\neq k_1,\ \ \alpha\neq k_2,$$

сондықтан дербес шешім

$$\tilde{y}=(Ax+B)e^{4x}$$

түрінде ізделінеді.

$$\tilde{y}'=Ae^{4x}+4(Ax+B)e^{4x},\quad \tilde{y}''=8Ae^{4x}+16(Ax+B)e^{4x}$$

туындыларын есептеп, берілген теңдеуге қойсақ

$$8Ae^{4x}+16(Ax+B)e^{4x}+2(A+4Ax+4B)e^{4x}-3(Ax+B)e^{4x}=xe^{4x}$$

теңдеуді e^{4x} - не қысқартайық, сонда

$$\begin{gathered}8A+16(Ax+B)+2(A+4Ax+4B)-3(Ax+B)=x\\ 8A+16Ax+16B+2A+8Ax+8B-3Ax-3B=x\\ 21Ax+10A+21B=x\\ x:21A=1\\ x^0:10A+21B=0\end{gathered}$$

осыдан

$$A=\frac{1}{21},\ \ B=-\frac{10A}{21}=-\frac{10}{441}.$$

Берілген теңдеудің жалпы шешімі

$$y=\bar{y}+\tilde{y}=C_1e^{x}+C_2\ e^{-3x}+\left(\frac{1}{21}x-\frac{10}{441}\right)e^{4x}.$$

Енді алғашқы шарттарды пайдаланып, C_1 және C_2 тұрақтыларының сандық мәндерін табайық.

$$y' = C_1 e^{x} - 3C_2 e^{-3x} + \frac{1}{21} e^{4x} + 4\left(\frac{1}{21}x - \frac{10}{441}\right)e^{4x},$$

$$x=0, \quad y'=1= C_1 - 3C_2 + \frac{1}{21} - \frac{40}{441},$$

$$y=0= C_1 + C_2 - \frac{10}{441}$$

Осыдан

$$C_1 = \frac{235}{441}, \quad C_2 = -\frac{25}{98}.$$

$$y = \frac{235}{441} e^{x} - \frac{25}{98} e^{-3x} + \left(\frac{1}{21}x - \frac{10}{441}\right)e^{4x}$$

берілген алғашқы шарттарды қанағаттандыратын теңдеудің дербес шешімі.

6. $\begin{cases} y' = y + 8z \\ z' = 5y + 7z \end{cases}$ дифференциалдық теңдеулерінің жүйесінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі: Жүйенің сипаттамалық теңдеуін құрайық.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 5 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(7-\lambda) - 40 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda - 33 = 0$$

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 11.$$

Енді берілген жүйеге сәйкес сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін жазайық

$$\begin{cases} (1-\lambda)\alpha_1 + 8\alpha_2 = 0, \\ 5\alpha_1 + (7-\lambda)\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

$\lambda_1 = -3$ болғанда $\begin{cases} 4\alpha_1 + 8\alpha_2 = 0, \\ 5\alpha_1 + 10\alpha_2 = 0. \end{cases}$ Бұдан $\alpha_1 = -2\alpha_2.$

Осыдан $\alpha_1 = \alpha_{11} = 1,\ \alpha_2 = \alpha_{21} = -\frac{1}{2},$ онда

$$y_1 = e^{-3x}, \quad z_1 = -\frac{1}{2}e^{-3x}.$$

$\lambda_1 = 11$ болғанда $\begin{cases} -10\alpha_1 + 8\alpha_2 = 0, \\ 5\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0. \end{cases}$ Бұдан $5\alpha_1 = 4\alpha_2.$

Осыдан $\alpha_1 = \alpha_{12} = 1, \ \alpha_2 = \alpha_{22} = \frac{5}{4},$ онда

$$y_2 = e^{11x}, \quad z_2 = \frac{5}{4}e^{11x}.$$

Сонымен берілген жүйенің жалпы шешімі

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{11x} \\ z = -\frac{1}{2}C_1 e^{-3x} + \frac{5}{4}C_2 e^{11x}. \end{cases}$$