БІЛІМ АЛУШЫНЫҢ ӨЗДІК ЖҰМЫСЫНЫҢ ТАПСЫРМАЛАРЫ №2

2 Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер тақырыбына арналған типтік есептер

1. $y=\varphi(x,C)$ функциясы $y'=f(x,y)$ дифференциалдық теңдеуінің шешімі болуын тексеру керек, мұндағы C - кез келген тұрақты.

№	$y=\varphi(x,C)$	$y'=f(x,y)$
1	$y=x^2\left(1+Ce^{1/x}\right)$	$x^2y'+(1-2x)y=x^2$
2	$y=xe^{Cx}$	$xy'=(1+\ln y-\ln x)y$
3	$y=\frac{Cx+1}{x}+1$	$y-xy'=1+x^2y$
4	$y=\left(x+Ce^{-\frac{x}{2}}-2\right)^2$	$y'+y=x\sqrt{y}$
5	$y=Cx+e^x$	$xy'-y+e^x=0$
6	$y=\frac{2+Cx}{1+2x}$	$2(1+x^2y')=y-xy'$
7	$y=Ce^{tg\frac{x}{2}}$	$y'\sin x=y\ln y$
8	$y=C\sqrt{x^2-1}$	$(x^2-1)y'-xy=0$
9	$y=Cx^2e^{-\frac{3}{x}}$	$x^2y'-2xy=3y$
10	$y=Ce^{-2x}+2x-1$	$y'+2y=4x$
11	$y=Cx^2e^{1/x}+x^2$	$y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1$
12	$y=e^{-x^2}\left(C+\frac{1}{2}x^2\right)$	$y'+2xy=xe^{-x^2}$
13	$y=(x+C)(1+x^2)$	$(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$
14	$y=Cx^2+\frac{1}{x}$	$x^2y'=2xy-3$
15	$y=Cx+x^2$	$xy'=y+x^2$

16	$y=(x+C)e^x$	$y'=y+e^x$
17	$y=C\sqrt{x^2-1}$	$(x^2-1)y'-xy=0$
18	$y=\frac{8x+C}{x^5}$	$y'+\frac{5y}{x}=\frac{8}{x^5}$
19	$y=ctg(C+x)+x$	$y'+(x+y)^2=0$
20	$y=C\sin x-2$	$y'\sin x=y\cos x+2\cos x$
21	$y=\sqrt{C+x^2}$	$yy'-x=0$
22	$y=\frac{2+Cx}{1+2x}$	$2(x^2y'+1)=x-xy'$
23	$y=\frac{1}{Cx+x^2}$	$y'+\frac{y}{x}=-xy^2$
24	$y=Cx+\frac{1}{C}$	$xy'-y=\frac{1}{y}$
25	$y=\frac{2x}{1-Cx^2}$	$y'+\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x^2}$
26	$y=x(C+\cos x)$	$y'-\frac{y}{x}=x\cos x$
27	$y=tg(C+x)-x$	$y'=(x+y)^2$
28	$y=Cx^2+\frac{1}{2}x^4$	$y'-\frac{2y}{x}=x^3$
29	$y=\frac{7x+C}{x^4}$	$y'+\frac{4y}{x}=\frac{7}{x^4}$
30	$y=\frac{C}{x}+\frac{2}{5}x\sqrt{x}$	$y'+\frac{y}{x}=\sqrt{x}$

2. Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуінің шешімін табу керек.

№	а)	ә)	б)
1	$y'=\cos 5x$	$y'=\frac{y-1}{2x+3}$	$x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0$
2	$y'=\sin 3x$	$y'=\frac{y-2}{x-5}$	$x\sqrt{y^2-4}dx+y\sqrt{x^2+3}dy=0$

3	$y' = \frac{1}{\cos^2 2x}$	$y' = \frac{y+1}{3x+4}$	$x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{4-x^2}\,dy = 0$
4	$y' = 2x - 3$	$y' = \frac{2y-1}{x+3}$	$x\left(y^2+2\right)dx + y\left(x^2-2\right)dy = 0$
5	$y' = e^{2x}$	$y' = \frac{3y+2}{4x-5}$	$x\sqrt{y^2-4}dx + y\sqrt{x^2-5}dy = 0$
6	$y' = \cos\frac{x}{5}$	$y' = \frac{4y-5}{x+2}$	$x\sqrt{4-y^2}\,dx - y\sqrt{5-x^2}\,dy = 0$
7	$y' = \sin\frac{x}{3}$	$y' = \frac{y+5}{4x+3}$	$x\left(y^2-1\right)dx - y\left(x^2+3\right)dy = 0$
8	$y' = \frac{1}{\sin^2 4x}$	$y' = \frac{y+2}{5x-4}$	$x\sqrt{y^2+4}dx - y\sqrt{x^2-2}dy = 0$
9	$y' = \frac{1}{3x-1}$	$y' = \frac{y-5}{3x-2}$	$x\sqrt{2-y^2}\,dx + y\sqrt{3-x^2}\,dy = 0$
10	$y' = e^{-3x}$	$y' = \frac{y+4}{3-2x}$	$x\left(y^2-3\right)dx - y\left(x^2-4\right)dy = 0$
11	$y' = 3x^2 + 2$	$y' = \frac{4y+1}{3x-4}$	$x\sqrt{y^2+2}dx + y\sqrt{x^2-5}dy = 0$
12	$y' = \cos 2x$	$y' = \frac{-4y-1}{x-2}$	$x\sqrt{3-y^2}\,dx - y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$
13	$y' = \sin 4x$	$y' = \frac{y-1}{3x-5}$	$x\left(y^2+2\right)dx + y\left(x^2-4\right)dy = 0$
14	$y' = \frac{2}{\cos^2 4x}$	$y' = \frac{y+3}{2-5x}$	$x\sqrt{y^2-1}dx - y\sqrt{x^2+5}dy = 0$
15	$y' = e^{\frac{x}{3}}$	$y' = \frac{2y+3}{5x+4}$	$x\sqrt{5-y^2}\,dx + y\sqrt{2-x^2}\,dy = 0$
16	$y' = \frac{3}{\sin^2 6x}$	$y' = \frac{4-3y}{x+2}$	$x\left(y^2+2\right)dx - y\left(x^2-5\right)dy = 0$
17	$y' = 3x^5 - 2x$	$y' = \frac{y+3}{x+4}$	$x\sqrt{y^2+5}dx + y\sqrt{x^2+1}dy = 0$
18	$y' = \frac{3}{2x+9}$	$y' = \frac{y+1}{2-3x}$	$x\sqrt{1-y^2}\,dx - y\sqrt{3-x^2}\,dy = 0$
19	$y' = \cos\frac{x}{7}$	$y' = \frac{3-2y}{4-5x}$	$x\left(y^2-2\right)dx - y\left(x^2+5\right)dy = 0$

20	$y' = \sin\frac{x}{8}$	$y' = \frac{1-2y}{4x+3}$	$x\sqrt{y^2-5}dx + y\sqrt{x^2+3}dy = 0$
21	$y' = e^{-5x}$	$y' = \frac{y+5}{5x+1}$	$x\sqrt{4-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$
22	$y' = \frac{5}{\cos^2 8x}$	$y' = \frac{2y+3}{3x+2}$	$x\left(y^2+3\right)dx + y\left(x^2-2\right)dy = 0$
23	$y' = \frac{3}{x^2}$	$y' = \frac{y+3}{2-x}$	$x\sqrt{y^2+4}dx - y\sqrt{x^2-5}dy = 0$
24	$y' = \cos 6x$	$y' = \frac{2y-3}{x}$	$x\sqrt{3-y^2}\,dx - y\sqrt{2-x^2}\,dy = 0$
25	$y' = \sin 10x$	$y' = \frac{2y+5}{3x+4}$	$x\left(y^2-4\right)dx - y\left(x^2-1\right)dy = 0$
26	$y' = e^{7x}$	$y' = \frac{3y}{5x+4}$	$x\sqrt{y^2+3}dx + y\sqrt{x^2-1}dy = 0$
27	$y' = 4x^3 - 2x$	$y' = \frac{y+2}{x+5}$	$x\sqrt{2-y^2}\,dx - y\sqrt{5-x^2}\,dy = 0$
28	$y' = \frac{2}{\sin^2 9x}$	$y' = \frac{y+2}{3-4x}$	$x\left(y^2+4\right)dx + y\left(x^2-5\right)dy = 0$
29	$y' = \sin\frac{x}{10}$	$y' = \frac{2y-3}{3x-2}$	$x\sqrt{y^2-3}dx - y\sqrt{x^2-4}dy = 0$
30	$y' = \frac{2}{\sqrt{4x+7}}$	$y' = \frac{y-5}{5x-1}$	$x\sqrt{5-y^2}\,dx + y\sqrt{4-x^2}\,dy = 0$

3. Біртекті дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

1	$y' = \frac{2x+y}{x+2y}$	2	$y' = \frac{2y}{2x+y}$
3	$y' = \frac{3x+2y}{2x+4y}$	4	$y' = \frac{2x+3y}{3x+4y}$
5	$y' = \frac{3x+2y}{2x}$	6	$y' = \frac{-2x+4y}{4x+5y}$
7	$y' = \frac{4x+y}{x-4y}$	8	$y' = \frac{3y}{3x+2y}$
9	$y' = \frac{5x+2y}{2x-3y}$	10	$y' = \frac{5x+3y}{3x-2y}$

11	$y' = \frac{4x+3y}{3x}$	12	$y' = \frac{x+4y}{4x+3y}$
13	$y' = \frac{3x+y}{x+3y}$	14	$y' = \frac{4y}{4x-y}$
15	$y' = \frac{x+2y}{2x-5y}$	16	$y' = \frac{-4x+3y}{3x+2y}$
17	$y' = \frac{5x+4y}{4x}$	18	$y' = \frac{5x+4y}{4x-3y}$
19	$y' = \frac{-5x+y}{x+5y}$	20	$y' = \frac{5y}{5x-4y}$
21	$y' = \frac{4x+2y}{2x-y}$	22	$y' = \frac{x+3y}{3x+5y}$
23	$y' = \frac{2x+5y}{5x}$	24	$y' = \frac{-3x+4y}{4x-2y}$
25	$y' = \frac{4x+y}{x+2y}$	26	$y' = \frac{y}{x+5y}$
27	$y' = \frac{-5x+2y}{2x+3y}$	28	$y' = \frac{4x+3y}{3x+y}$
29	$y' = \frac{4x+y}{x}$	30	$y' = \frac{5x+4y}{4x-5y}$

4. $y(x_0)=y_0$ алғашқы шартын қанағаттандыратын бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табу керек.

1	$y' + \frac{2y}{x} = x^4$	$y(1)=\frac{1}{2}$
2	$y' - \frac{3y}{x} = x^2$	$y(1)=-2$
3	$y' + \frac{4y}{x} = \frac{1}{x^5}$	$y(1)=3$
4	$y' + \frac{3y}{x} = \frac{1}{x^2}$	$y\left(\frac{1}{2}\right)=0$
5	$y' - \frac{4y}{x} = x^3$	$y(1)=4$

6	$y' + \frac{4y}{x} = \frac{1}{x^2}$	$y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$
7	$y' - \frac{3y}{x} = \frac{1}{x^4}$	$y(1) = 2$
8	$y' + \frac{2y}{x} = x^3$	$y\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$
9	$y' + \frac{3y}{x} = x^5$	$y(1) = 1$
10	$y' - \frac{4y}{x} = \frac{1}{x^3}$	$y(1) = -\frac{1}{2}$
11	$y' - \frac{2y}{x} = x^5$	$y(1) = 2$
12	$y' + \frac{3y}{x} = x^2$	$y(1) = -1$
13	$y' - \frac{4y}{x} = x^2$	$y(1) = 5$
14	$y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^3}$	$y\left(\frac{1}{2}\right) = -1$
15	$y' + \frac{2y}{x} = x^5$	$y(1) = \frac{1}{4}$
16	$y' - \frac{3y}{x} = x^4$	$y(1) = 4$
17	$y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^4}$	$y(-1) = \frac{1}{3}$
18	$y' + \frac{4y}{x} = \frac{1}{x^3}$	$y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$
19	$y' + \frac{3y}{x} = x^4$	$y(1) = -2$
20	$y' - \frac{2y}{x} = x^3$	$y(1) = \frac{1}{2}$
21	$y' - \frac{4y}{x} = \frac{1}{x}$	$y\left(\frac{1}{2}\right) = -2$
22	$y' - \frac{2y}{x} = \frac{1}{x}$	$y\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

23	$y' - \frac{3y}{x} = \frac{1}{x^2}$	$y(1) = 0$
24	$y' + \frac{4y}{x} = x^3$	$y(-1) = \frac{1}{2}$
25	$y' - \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^4}$	$y(1) = -3$
26	$y' + \frac{3y}{x} = \frac{1}{x}$	$y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$
27	$y' - \frac{4y}{x} = x^2$	$y\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$
28	$y' - \frac{2y}{x} = x^4$	$y(1) = \frac{1}{2}$
29	$y' - \frac{3y}{x} = \frac{1}{x}x$	$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$
30	$y' + \frac{4y}{x} = x^5$	$y(1) = -0{,}1$

5. Бернулли теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

1	$y' + \frac{3y}{x} = xy^2$	2	$y' + \frac{2y}{x} = x^4y^3$
3	$y' - \frac{y}{x} = x^2y^4$	4	$y' - \frac{4y}{x} = x^3y^2$
5	$y' + \frac{2y}{x} = xy^3$	6	$y' - \frac{y}{x} = x^3y^4$
7	$y' + \frac{3y}{x} = x^4y^2$	8	$y' + \frac{4y}{x} = x^2y^3$
9	$y' + \frac{2y}{x} = xy^4$	10	$y' - \frac{4y}{x} = xy^2$
11	$y' - \frac{y}{x} = x^4y^3$	12	$y' + \frac{3y}{x} = x^2y^4$
13	$y' + \frac{y}{x} = x^3y^2$	14	$y' - \frac{2y}{x} = xy^3$
15	$y' + \frac{2y}{x} = x^3y^4$	16	$y' - \frac{y}{x} = x^4y^2$

17	$y' + \frac{y}{x} = x^2 y^3$	18	$y' - \frac{3y}{x} = xy^4$
19	$y' - \frac{3y}{x} = xy^2$	20	$y' - \frac{y}{x} = x^4 y^3$
21	$y' + \frac{3y}{x} = x^2 y^4$	22	$y' + \frac{4y}{x} = x^3 y^2$
23	$y' - \frac{2y}{x} = xy^3$	24	$y' + \frac{y}{x} = x^3 y^4$
25	$y' - \frac{3y}{x} = x^4 y^2$	26	$y' - \frac{4y}{x} = x^2 y^3$
27	$y' + \frac{3y}{x} = xy^4$	28	$y' + \frac{4y}{x} = xy^2$
29	$y' - \frac{2y}{x} = x^4 y^3$	30	$y' - \frac{y}{x} = x^2 y^4$

6. Толық дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

1	$\left(2xy + y^2 + 3\right)dx + \left(x^2 + 2xy - y^2\right)dy = 0$
2	$\left(x^2 - 4xy - 2y^2\right)dx + \left(y^2 - 4xy - 2x^2\right)dy = 0$
3	$\left(xy^2 + \frac{x}{y^2}\right)dx + \left(x^2 y - \frac{x^2}{y^3}\right)dy = 0$
4	$\left(x^2 + xy^2\right)dx + \left(x^2 y + y^3\right)dy = 0$
5	$\left(3x^3 + 6x^2 y + 3xy^2\right)dx + \left(2x^3 + 3x^2 y\right)dy = 0$
6	$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx + \left(x^2 y - \frac{2y}{x^3}\right)dy = 0$
7	$2\left(3xy^2 + 2x^3\right)dx + 3\left(2x^2 y + y^2\right)dy = 0$
8	$\left(x^2 + e^y\right)dx + \left(\cos y + xe^y\right)dy = 0$
9	$\frac{1+xy}{x^2}dx + \frac{1-xy}{xy^2}dy = 0$
10	$\left(5xy^2 - x^3\right)dx + \left(5x^2 y - y\right)dy = 0$
11	$4\left(x^3 + xy\right)dx + \left(2x^2 - 9y^2\right)dy = 0$

12	$\frac{y}{x^2}dx-\frac{xy+1}{x}dy=0$
13	$\left(y^3+\cos x\right)dx+\left(3xy^2+e^y\right)dy=0$
14	$\left(4x^3-2y^2-3\right)dx+\left(5-4xy\right)dy=0$
15	$\left(3x^2+\frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)dx-\frac{2x}{y^2}\cos\frac{2x}{y}dy=0$
16	$\left(3x^2+4y^2\right)dx+\left(e^y+8xy\right)dy=0$
17	$\left(4x^3-1-\frac{5y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{5}{x}-2y\right)dy=0$
18	$\left(y^2+y\sec^2 x\right)dx+\left(2xy+tgx\right)dy=0$
19	$\left(e^x+3x^2e^y\right)dx+\left(x^3e^y+3y^2\right)dy=0$
20	$\left(\sin y+y\sin x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}\right)dy=0$
21	$\left(3xy^3+4x^3y\right)dx+\left(3x^2y^2+x^4\right)dy=0$
22	$\left(2x+3y+2\right)dx+\left(3x+2y+4\right)dy=0$
23	$\frac{dx}{y}-\frac{x+y^2}{y^2}dy=0$
24	$\left(2x\cos y+y^2e^x\right)dx+\left(3y^2e^x-x^2\sin y\right)dy=0$
25	$\left(\sin 2x-2\cos\left(x+y\right)\right)dx+\left(\cos 2y-2\cos\left(x+y\right)\right)dy=0$
26	$\left(4x^3+3x^2y^2\right)dx+\left(2x^3y+3y^2\right)dy=0$
27	$\left(3x^2-2xy^2\right)dx+\left(5y^4-2x^2y\right)dy=0$
28	$\left(3x^2\cos y+y^2\cos x\right)dx+\left(2y\sin x-x^3\sin y\right)dy=0$
29	$\left(xe^x+\frac{y}{x^2}\right)dx-\frac{1}{x}dy=0$
30	$\left(5x^4+y^4\right)dx+\left(4xy^3+3y^2\right)dy=0$

Тапсырмаларды шығару жолы

1. $y=x^2+\frac{C}{x}$ функциясы $xy'+y=3x^2$ дифференциалдық теңдеуінің шешімі болуын тексеру керек, мұндағы C - кез келген тұрақты.

Шешуі: Алдымен берілген функцияның туындысын табамыз.

$$y' = 2x - \frac{C}{x^2}.$$

Енді y, y' - ті теңдеуге қойсақ, онда

$$x\left(2x - \frac{C}{x^2}\right) + x^2 + \frac{C}{x} = 3x^2,$$

$$2x^2 - \frac{C}{x} + x^2 + \frac{C}{x} = 3x^2,$$

$$3x^2 \equiv 3x^2,$$

яғни берілген функция дифференциалдық теңдеудің шешімі болады.

2. Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуінің шешімін табу керек.

а) $y' = \sin 8x$ дифференциалдық теңдеуінің шешімін табу керек.

Шешуі:

$$\frac{dy}{dx} = \sin 8x$$

Бұдан

$$y = \int \sin 8x\, dx + C = \frac{1}{8}\cos 8x + C.$$

Осыдан берілген теңдеудің жалпы шешімі

$$y = \frac{1}{8}\cos 8x + C.$$

ә) $y' = \frac{4y+5}{5x+6}$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y+5}{5x+4} \qquad \text{немесе} \qquad \frac{dy}{y+1{,}25} = \frac{4dx}{5x+6}$$

Екі жағын интегралдасақ

$$\int \frac{dy}{y+1{,}25} = 4\int \frac{dx}{5x+6} + \ln C,$$

$$\ln|y+1{,}25| = \frac{4}{5}\ln|5x+6| + \ln C,$$

$$\ln|y+1{,}25| = \ln C(5x+6)^{4/5},$$

$$y+1{,}25 = C(5x+6)^{4/5}.$$

Осыдан берілген теңдеудің жалпы шешімі

$$y = -1{,}25 + C(5x+6)^{4/5}.$$

б1) $x(y^2-5)dx + y(x^2+6)dy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі: Бұл теңдеуді шешу үшін оның екі жағын да $(y^2-5)(x^2+6)$ көбейтіндісіне бөлеміз. Сонда айнымалысы ажыратылатын теңдеу аламыз

$$\frac{xdx}{x^2-5} + \frac{ydy}{y^2+6} = 0\,.$$

Екі жағын интегралдасақ $\int \frac{xdx}{x^2-5} + \int \frac{ydy}{y^2+6} = C,$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2-5) + \frac{1}{2}\ln(y^2+6) = \frac{1}{2}\ln C,$$

$$\ln((x^2-5)(y^2+6)) = \ln C\,.$$

Осыдан берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралы

$$(x^2-5)(y^2+6) = C\,.$$

б2) $x\sqrt{y^2+5}dx - y\sqrt{6-x^2}dy = 0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі: Бұл теңдеуді шешу үшін оның екі жағын да $\sqrt{(y^2+5)(6-x^2)}$ өрнегіне бөлеміз. Сонда айнымалысы ажыратылатын теңдеу аламыз

$$\frac{xdx}{\sqrt{6-x^2}}-\frac{ydy}{\sqrt{y^2+5}}=0.$$

Екі жағын интегралдасақ $$\int\frac{xdx}{\sqrt{6-x^2}}-\int\frac{ydy}{\sqrt{y^2+5}}=-C.$$

Осыдан берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралы

$$\sqrt{y^2+5}+\sqrt{6-x^2}=C.$$

3. $y'=\frac{4x+5y}{5x-2y}$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі: Дифференциалдық теңдеудің оң жағы нөл көрсеткішті біртекті функция.

$\frac{y}{x}=t,\ y=xt,\ y'=t+xt'$ ауыстыруын қолданамыз.

$$t+xt'=\frac{4x+5xt}{5x-2xt},\qquad t+xt'=\frac{x(4+5t)}{x(5-2t)},$$

$$\frac{xdt}{dx}=\frac{4+5t}{5-2t}-t,\qquad \frac{xdt}{dx}=\frac{4+2t^2}{5-2t},$$

$$\frac{5-2t}{4+2t^2}dt=\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{5-2t}{4+2t^2}dt=\int\frac{dx}{x}+C,$$

$$\frac{5}{2}\int\frac{dt}{2+t^2}dt-\int\frac{tdt}{2+t^2}=\int\frac{dx}{x}+C,$$

$$\frac{5}{2\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\ln\left|2+t^2\right|=\ln x+\frac{1}{2}C,$$

мұндағы

$$\int\frac{tdt}{2+t^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(2+t^2\right)}{2+t^2}=-\frac{1}{2}\ln\left|2+t^2\right|.$$

Осыдан

$$\frac{5}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}=\ln\left|2+t^2\right|+2\ln x+C,$$

$$\frac{5}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}=\ln\left(\left(2+t^2\right)x^2\right)+C.$$

Енді бастапқы ізделінді $y=y(x)$ функциясына көшсек, онда берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралы

$$\frac{5}{\sqrt{2}}arctg\frac{y}{x\sqrt{2}}=\ln\left(2x^2+y^2\right)+C.$$

4. $y(1)=\frac{1}{3}$ алғашқы шартын қанағаттандыратын $y'+\frac{5y}{x}=x^6$ дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табу керек.

Шешуі: Алдымен берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі табылады.

$$y=uv \qquad y'=u'v+uv'$$

$$u'v+uv'+\frac{5uv}{x}=x^6 \qquad u'v+u\left(v'+\frac{5v}{x}\right)=x^6$$

v функциясы $v'+\frac{5v}{x}=0$ теңдеуінің дербес шешімі болғандықтан

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{5v}{x} \qquad \frac{dv}{v}=-\frac{5dx}{x}$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{5dx}{x}+\ln C$$

$$\ln v=-5\ln x, \quad \ln v=\ln\frac{1}{x^5}, \quad v=\frac{1}{x^5}.$$

Енді u функциясын табу үшін

$$u'v=x^6$$

теңдеуін қарастырамыз.

$$\frac{u'}{x^5}=x^6, \quad u'=x^{11}, \qquad u=\frac{x^{12}}{12}+C.$$

Бұдан

$$y = uv = \left(\frac{x^{12}}{12} + C \right) \cdot \frac{1}{x^5} = \frac{x^7}{12} + \frac{C}{x^5}$$

Сонымен $y = \frac{x^7}{12} + \frac{C}{x^5}$ берілген теңдеудің жалпы шешімі.

Енді $x = 1,\ y = \frac{1}{3}$ болғандықтан $\frac{1}{3} = \frac{1}{12} + C, \quad C = \frac{1}{4}.$

Осыдан $y = \frac{x^7}{12} + \frac{1}{4x^5}$ берілген теңдеудің дербес шешімі.

5. $y' + \frac{3y}{x} = x^4 y^5$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі: Бұл Бернулли теңдеуі. Теңдеудің екі жағын y^{-5} – ке көбейтсеміз

$$y^{-5} y' + \frac{3}{x} y^{-4} = x^4,$$

теңдеуге

$$y^{-4} = z, \quad -4y^{-5} y' = z', \quad y^{-5} y' = -\frac{1}{4} z'$$

ауыстыруын қолданамыз. Сонда

$$-\frac{1}{4} z' + \frac{3z}{x} = x^4, \qquad z' - \frac{12z}{x} = -4x^4.$$

Бұл теңдеу біртекті емес сызықты теңдеу. Сондықтан

$$z = uv, \quad z' = u'v + uv',$$

$$u'v + uv' - \frac{12uv}{x} = -4x^4,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{12v}{x}\right) = -4x^4.$$

v функциясы $v' - \frac{12v}{x} = 0$ теңдеуінің дербес шешімі болғандықтан

$$\frac{dv}{v}=12\frac{dx}{x},\quad \ln v=12\ln x,\quad v=x^{12}.$$

Енді u функциясын табу үшін

$$u'v=-x^2$$

теңдеуін қарастырамыз.

$$u'x^{12}=-4x^4,\quad u'=-4x^{-8},$$

$$u=-4\int x^{-8}\,dx+C=\frac{4}{7}x^{-7}+C.$$

Сонымен

$$z=uv=x^{12}\left(\frac{4}{7}x^{-7}+C\right)=\left(\frac{4}{7}x^5+Cx^{12}\right),$$

$$y^{-4}=\left(\frac{4}{7}x^5+Cx^{12}\right),$$

$$y^4=\frac{1}{\left(\frac{4}{7}x^5+Cx^{12}\right)}$$

берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралы.

6. $(3x^2y+2y+3)dx+(x^3+2x+3y^2)dy=0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі:

$$M(x,y)=3x^2y+2y+3,\qquad N(x,y)=x^3+2x+3y^2.$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2+2,\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=3x^2+2.$$

$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ шарты орындалады, берілген теңдеу толық дифференциалды теңдеу болғандықтан жалпы шешімі

$$\int_{x_0}^{x}\left(3x^2y+2y+3\right)dx+\int_{y_0}^{y}\left(x_0^3+2x_0+3y^2\right)dy=C,$$

$x_0 = 0,\ y_0 = 0$ деп алсақ, онда

$$\int_0^x \left(3x^2 y + 2y + 3\right) dx + \int_0^y 3y^2\, dy = C$$

$$x^3 y + 2xy + 3x + y^3 = C$$

берілген теңдеудің жалпы интегралы.