Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

ЫҚТИМАЛДЫҚТЫҢ ҚОСУ/ КӨБЕЙТУ ТЕОРЕМАЛАРЫ ЖӘНЕ ТЫМ БОЛМАҒАНДА БІР ОҚИҒАНЫҢ ПАЙДА БОЛУ ЫҚТИМАЛДЫҒЫ

ТОЛЫҚ ЫҚТИМАЛДЫҚ ЖӘНЕ БАЙЕС ФОРМУЛАСЫ

ТӘУЕЛСІЗ СЫНАҚТАРДЫҢ ҚАЙТАЛАНУЫ

Дәрістік сабақ жоспары:

- **ЫҚТИМАЛДЫҚТЫҢ ҚОСУ/ КӨБЕЙТУ ТЕОРЕМАЛАРЫ ЖӘНЕ ТЫМ БОЛМАҒАНДА БІР ОҚИҒАНЫҢ ПАЙДА БОЛУ ЫҚТИМАЛДЫҒЫ**
- **ТОЛЫҚ ЫҚТИМАЛДЫҚ ЖӘНЕ БАЙЕС ФОРМУЛАСЫ**
- **ТӘУЕЛСІЗ СЫНАҚТАРДЫҢ ҚАЙТАЛАНУЫ**

Үйлесімсіз оқиғалар ықтималдықтарының қосу теоремасы:

A және B үйлесімсіз оқиғалар болса, онда

$$P(A+B)=P(A)+P(B),$$

яғни екі үйлесімсіз оқиғалардың кез келген біреуінің орындалу ықтималдығы осы оқиғалар ықтималдықтарының қосындысына тең болады.

Салдар 1: Өзара үйлесімсіз бірнеше оқиғалардың кез келген біреуінің орындалу ықтималдығы осы оқиғалар ықтималдықтарының қосындысына тең болады:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Үйлесімді оқиғалар ықтималдықтарының қосу теоремасы:

A және B үйлесімді оқиғалар болса, онда

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B),$$

яғни екі үйлесімді оқиғалардың ең болмаса біреуінің орындалу ықтималдығы осы оқиғалар ықтималдықтарының қосындысынан оқиғалардың бірлесе орындалу ықтималдығын алып тастағандағы нәтижесіне тең болады.

Салдар 2: A, B және C үйлесімді оқиғалар болса, онда

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cdot B)-P(A\cdot C)-P(B\cdot C)+P(ABC).$$

Мысал 1: Институт бақылау жұмыстарының жоспарын үш қаладан алады. Жоспарды бірінші және екінші қаладан алу ықтималдығы сәйкесінше 0,7 және 0,2-ге тең. Жоспарды үшінші қаладан алу ықтималдығын табыңыз.

Шешімі:

a) Өзара үйлесімсіз A_1, A_2, A_3 оқиғалары оқиғалардың толық тобын құрайтын болса, онда
$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$

b) A, B, C арқылы институт бақылау жұмыстарының жоспарларын алатын қалаларды белгілейік. Бұл оқиғалар оқиғалардың толық тобын құрайды, сондықтан
P(A)+P(B)+P(C)=1.
Ендеше, ізделінді ықтималдық: P(B)=1-0,7-0,2=0,1.

c) Жауабы: $P(B) = 0{,}1.$

2 Ықтималдықтарды көбейту теоремалары

Анықтамалар:

- егер екі оқиғаның біреуінің пайда болуының ықтималдығы екіншісінің пайда болуына тәуелсіз (тәуелді) болса, онда *оқиғалар тәуелсіз (тәуелді)* деп аталады.
- егер оқиғалардың әрқайсысы мен оның қалғандары арқылы жасалынған кез келген сызықтық комбинациясы тәуелсіз оқиғалар болса, онда оқиғалар *жинағы бойынша тәуелсіз* деп аталады.
- A оқиғасы орындалғаны белгілі деп табылған B оқиғасының ықтималдығын B *оқиғасының шартты ықтималдығы* деп айтамыз, белгіленуі: $P_A(B)$ $[P(B/A)]$.

Тәуелді оқиғалар ықтималдықтарының көбейту теоремасы:

A және B тәуелді оқиғалар болса, онда

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A),$$

яғни екі тәуелді оқиғаның бірлесе орындалу ықтималдығы біріншісінің ықтималдығын бірінші оқиға орындалды деген ұйғарыммен алынған екіншісінің шартты ықтималдығына көбейткенге тең болады.

А оқиғасының В оқиғасы орындалғандағы *шартты ықтималдығы* деп

$$P_A(B) = P(AB)/P(B), \quad P(B) \neq 0$$

теңдігімен анықталатын санды айтамыз.

Салдар 3: Бірнеше оқиғалардың бір уақытта пайда болуының ықтималдығы

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$$

формуласымен есептелінеді, мұндағы $P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$ ықтималдығы $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ оқиғалары орындалғаны белгілі болғандағы A_n оқиғасының ықтималдығы, яғни бірнеше оқиғалардың бірлесе орындалу ықтималдығы біреуінің ықтималдығының басқаларының шартты ықтималдықтарына көбейтіндісіне тең болады және әрбір келесі оқиға ықтималдығы алдыңғы оқиғалар орындалды деген ұйғарыммен есептеледі.

Мысал 2: Жәшікте 5 ақ, 4 қара және 3 көк шарлар бар. Жәшіктен бір шар алынды. Егер әрбір алынған шар қайта жәшікке салынбаса, алынған бірінші шардың ақ (A), екінші шардың қара (B), үшінші шардың көк болу (C) ықтималдығын табыңыз.

Шешімі:

Есеп шарты бойынша $P(A)=\frac{5}{12}$, $P_A(B)=\frac{4}{11}$ - жәшікте бірінші шар алынғаннан кейін 11 шар қалды, бірақ жәшіктегі қара шардың саны өзгерген жоқ. Келесі шар алынғаннан кейін барлығы 10 шар қалды және жәшіктегі көк шардың саны өзгерген жоқ: $P_{AB}(C)=\frac{3}{10}$.

Бұдан: $P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{22}$.

Тәуелсіз оқиғалар ықтималдықтарының көбейту теоремасы:

A және B тәуелсіз оқиғалар болса, онда

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),$$

яғни екі тәуелсіз оқиғалардың бірлесе орындалу ықтималдығы осы оқиғалар ықтималдықтарының көбейтіндісіне тең болады.

Салдар 4: Егер $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғалар жинағы бойынша тәуелсіз болса, онда

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n),$$

себебі $P_{A_1}(A_2) = P(A_2)$, $P_{A_1 A_2}(A_3) = P(A_3), \ldots, P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n) = P(A_n)$.

Мысал 3: Жәшікте 5 ақ, 4 қара және 3 көк шарлар бар. Жәшіктен бір шар алынды. Егер әрбір алынған шар қайта жәшікке салынғаннан кейін ғана, келесі шар алынған болса, алынған бірінші шардың ақ (A), екінші шардың қара (B), үшінші шардың көк болу (С) ықтималдығын табыңыз.

Шешімі:

a) Егер $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғалар жинағы бойынша тәуелсіз болса, онда $P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$,

b) Есеп шарты бойынша A, B, C оқиғалары жинағы бойынша тәуелсіз оқиғалар:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{5}{144}.$$

c) Жауабы: $P(ABC) = \frac{5}{144}$.

3 Тым болмағанда бір оқиғаның пайда болуының ықтималдығы туралы теорема

Теорема 1. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғаларының тым болмағанда біреуінің пайда болу ықтималдығы:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - \ldots - P(A_{n-1}A_n) +$$
$$+ P(A_1A_2A_3) + \ldots + P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1A_2 \ldots A_n).$$

Мысал 4: Нысанаға үш оқ атылды. Бірінші оқтың нысанаға тию ықтималдығы - 0,6, екіншісінікі - 0,7, ал үшіншісінікі - 0,8. Тым болмағанда бір оқтың нысанаға тию ықтималдығын табыңыз.

Шешімі:

a) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғаларының тым болмағанда біреуінің пайда болу ықтималдығы:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - \ldots - P(A_{n-1}A_n) +$$
$$+ P(A_1A_2A_3) + \ldots + P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1A_2 \ldots A_n).$$

b) Оқиғалардың белгілеулері: A - бірінші оқ нысанаға тиді, B - екінші оқ нысанаға тиді, C - үшінші оқ нысанаға тиді, ал D - осы үш оқтың тым болмағанда біреуі нысанаға тиді деген оқиға болсын. Онда $D = A + B + C$, мұндағы A, B, C - үйлесімді жинағы бойынша тәуелсіз оқиғалар. Ендеше,

$$P(D) = P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = P(A) + P(B) + P(C) -$$
$$- P(A) \cdot P(B) - P(A) \cdot P(C) - P(B) \cdot P(C) + P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}976$$

c) Жауабы: $P(D) = 0{,}976$.

Салдар 5. Егер $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғалары өзара үйлесімсіз болса, онда

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n),$$

себебі бұл жағдайда $P(A_1 A_2) = P(A_1 A_3) = \ldots = P(A_1 A_2 \ldots A_n) = 0$.

Теорема 2. Өзара үйлесімсіз $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғалары *оқиғалардың толық тобын* құрайтын болса, онда

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Салдар 6. A және $\overline{A}$ қарама-қарсы оқиғалар үшін:

$$P(A)+P(\overline{A})=1 \Rightarrow P(A)=1-P(\overline{A}).$$

Мысал 5: Күннің жаңбырлы болуының ықтималдығы 0,7. Күннің ашық болу ықтималдығын табыңыз.

Шешімі: «Күн жаңбырлы» және «күн ашық» оқиғалары қарама-қарсы оқиғалар. Ендеше, күннің ашық болу ықтималдығы p=1-0,7=0,3.

Салдар 7. Өзара тәуелсіз $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғаларының тым болмағанда біреуінің орындалу ықтималдығы

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n, \qquad (1)$$

мұндағы q_i, $i = \overline{1,n}$ сәйкесінше $\overline{A}_i$ оқиғасының пайда болуының ықтималдығы.

Егер $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғаларының пайда болуларының ықтималдықтары өзара тең және ол p санына тең болса, онда (1) формуласы

$$P(A) = 1 - q^n, \quad q = 1 - p$$

түрінде жазылады.

ТОЛЫҚ ЫҚТИМАЛДЫҚ ЖӘНЕ БАЙЕС ФОРМУЛАСЫ

4 Толық ықтималдықтың формуласы

Егер A оқиғасы өзара үйлесімсіз толық топ құрайтын $B_1, B_2, \ldots, B_n$ болжамдарының (гипотезалар) біреуі орындалғанда орындалса, онда A оқиғасының орындалу ықтималдығы әр гипотеза ықтималдығының A оқиғасының шартты ықтималдығына көбейтінділерінің қосындысына тең болады:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A), \qquad (2)$$

және болжамдар ықтималдықтардың толық тобын құрайтындықтан

$$P(B_1)+P(B_2)+\ldots+P(B_n)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)=1.$$

Бұл формула *толық ықтималдықтың формуласы* деп аталады.

Мысал 6: Цехта өнімділігі бірдей 3 түрлі құрылғы бірдей заттар жасап шығарады. Бірінші, екінші және үшінші түрдегі құрылғылардың сапалы зат шығару ықтималдығы сәйкесінше 0,94; 0,9 және 0,85. Жәшікте 10 заттың 5-і бірінші түрдегі құрылғымен, 3-і екінші түрдегі құрылғымен, ал қалған 2-і үшінші түрдегі құрылғымен жасалған. Жәшіктен кез келген бір зат алынды. Алынған заттың сапалы болу ықтималдығын табыңыз.

Шешімі:

a) Егер A оқиғасы өзара үйлесімсіз толық топ құрайтын $B_1, B_2, \dots, B_n$ болжамдарының (гипотезалар) біреуі орындалғанда орындалса, онда A оқиғасының орындалу ықтималдығы әр гипотеза ықтималдығының A оқиғасының шартты ықтималдығына көбейтінділерінің қосындысына тең болады:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+\dots+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A), \qquad (24.1)$$

және болжамдар ықтималдықтардың толық тобын құрайтындықтан

$$P(B_1)+P(B_2)+\dots+P(B_n)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)=1.$$

b) A - жәшіктен алынған заттың сапалы болуы.

Онда болжамдар:

B_1 - зат бірінші түрдегі құрылғымен жасалған,

B_2 - зат екінші түрдегі құрылғымен жасалған,

B_3 - зат үшінші түрдегі құрылғымен жасалған деген оқиғалар болсын.

Есеп шарты бойынша:

$$P(B_1)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2},\quad P(B_2)=\frac{3}{10},\quad P(B_3)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}.$$

Егер заттың жекелей бірінші, екінші және үшінші түрдегі құрылғылармен жасалғаны белгілі болса, онда оның сапалы болу ықтималдығы:

$$P_{B_1}(A)=0{,}94,\quad P_{B_2}(A)=0{,}9,\quad P_{B_3}(A)=0{,}85.$$

Толық ықтималдықтың формуласын бойынша жәшіктен алынған заттың сапалы болу ықтималдығы:

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot 0{,}94+\frac{3}{10}\cdot 0{,}9+\frac{1}{5}\cdot 0{,}85=0{,}91.$$

c) Жауабы: $P(A)=0{,}91$.

5 Бейес формуласы

А оқиғасы өзара үйлесімсіз толық топ құрайтын $B_1, B_2, \ldots, B_n$ болжамдардың біреуі орындалғанда орындалсын. Егер А оқиғасы орындалса, онда болжамдар ықтималдығы Бейес формуласымен бағаланады:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) P_{B_i}(A)}, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (3)$$

бұл формуладағы $P(A)$ жоғарғыдағы (2) формуласымен есептеледі.

Мысал 7: Жоғарыдағы 6-мысалында алынған заттың сапалы екені белгілі болсын, яғни $P(A)=0{,}91$. Осы алынған заттың екінші түрдегі құрылғымен жасалу ықтималдығы неге тең, яғни $P_A(B_2)$ неге тең?

Шешімі:

a) А оқиғасы өзара үйлесімсіз толық топ құрайтын $B_1, B_2, \dots, B_n$ болжамдардың біреуі орындалғанда орындалсын. Егер А оқиғасы орындалса, онда болжамдар ықтималдығы Бейес формуласымен бағаланады:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) P_{B_i}(A)}, \quad i = \overline{1,n} \cdot \qquad (3)$$

бұл формуладағы $P(A)$ жоғарғыдағы (2) формуласымен есептеледі.

b) $P(B_2) = \frac{3}{10}$ - болжамның A оқиғасы орындалғанға дейінгі ықтималдығы, $P_A(B_2)$ шартты ықтималдығы A оқиғасы орындалғаннан кейінгі ықтималдығы.

Байес формуласын қолдансақ:

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i) P_{B_i}(A)} = \frac{\frac{3}{10} \cdot 0{,}9}{0{,}91} \approx 0{,}297 .$$

c) Жауабы: $P_A(B_2) \approx 0{,}297$.

ТӘУЕЛСІЗ СЫНАҚТАРДЫҢ ҚАЙТАЛАНУЫ

Егер А оқиғасының әрбір сынақта орындалу ықтималдығы басқа сынақтар нәтижелерінен тәуелсіз болатын сынақтар жүргізілсе, онда ондай сынақтар А оқиғасына байланысты тәуелсіз сынақтар деп аталады.

Әрқайсысында оқиғаның орындалу ықтималдығы бірдей болатын тәуелсіз сынақтарды қарастырайық.

Бернулли формуласы

n тәуелсіз сынақта A оқиғасының тура k рет пайда болу ықтималдығы

$$P_n(k) = P_{k,n} = C_n^k \cdot p^k q^{n-k} \qquad (1)$$

Бернулли формуласымен есептеледі, мұндағы $q = 1 - p$ (n неғұрлым аз болса).

Мысал 1. Нысананы тәуелсіз 6 рет оқ атылды. Әрқайсысында оқтың нысанаға тию ықтималдығы $p = 0{,}9$. Атылған тәуелсіз 6 оқтың тура төртеуінің нысанаға тию ықтималдығын табыңыз.

Шешуі: оқтың нысанаға тию ықтималдығы $p = 0{,}9$, бұдан $q = 0{,}1$.
Сынақтар саны n=6, ал k=4. Демек

$$P_6(4) = \frac{6!}{4! \cdot 2!}(0{,}9)^4 \cdot (0{,}1)^2 = 0{,}984.$$

n тәуелсіз сынақтарда оқиғаның

- *k реттен кем орындалу ықтималдығы:*
  $P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(k-1)$;
- *k реттен артық орындалу ықтималдығы:*
  $P_n(k+1)+P_n(k+2)+\ldots+P_n(n)$;
- *k реттен кем емес орындалу ықтималдығы:*
  $P_n(k)+P_n(k+1)+\ldots+P_n(n)$;
- *k реттен артық емес орындалу ықтималдығы:*
  $P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(k)$

формулаларымен табылады.

Анықтама 1. Р ықтималдығы ең үлкен мән қабылдайтын $k = k_0$ мәнін *ең ықтимал сан* деп атаймыз:

$$np - q \le k_0 \le np + p\,.$$

Полиномдық үлестірім

n тәуелсіз сынақ жүргізу нәтижесінде өзара тәуелсіз $A_1, A_2, ..., A_k$ оқиғаларының сәйкес $p_1, p_2, ..., p_k$ ықтималдықтарымен сәйкесінше $m_1, m_2, ..., m_k$ рет пайда болу жағдайларын қарастырайық, мұндағы $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$.

A_1 оқиғасының m_1 рет, A_2 оқиғасының m_2 рет, тағы сол сияқты A_k оқиғасының m_k рет пайда болу ықтималдығы

$$P_n(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot ... \cdot m_k!} \cdot p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} ... \cdot p_n^{m_k}.$$

формуласымен есептеледі, мұндағы $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$.

Бұл ықтималдықтың *полиномдық үлестірімі* деп аталады.

Мысал 2. Әрбір лотерея билетінің ірі ұтысты болу ықтималдығы p_1, кішігірім ұтысты болу ықтималдығы p_2 және мүлдем ұтыссыз болу ықтималдығы p_3. Барлығы n билет сатып алынды. Алынған билеттердің ішінде m_1 ірі ұтысты, m_2 кішігірім ұтысты болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Ұтыссыз билеттер саны $m_3 = n - m_1 - m_2$. Ықтималдықтың полиномдық формуласын қолданамыз:

$$P_n(m_1, m_2, m_3) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot m_3!} p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot p_3^{m_3}.$$

Лаплас теоремалары

n - өте үлкен сан және $p > 0{,}1$ болған жағдайда, Лапластың локалдық немесе интегралдық теоремасын қолданамыз.

Лапластың локалдық теоремасы. Тәуелсіз n сынақ жүргізілгенде A оқиғасының тура k рет пайда болу ықтималдығы келесі формуламен жуықтап есептеледі:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) \qquad (2)$$

мұндағы $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $0 < p < 1$.

$\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ функциясының мәнін кестеден табамыз және $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Лапластың интегралдық теоремасы. Тәуелсіз n сынақ жүргізу нәтижесінде A оқиғасының k_1-ден кем емес және k_2-ден артық емес рет пайда болуының ықтималдығы келесі формуламен жуықтап есептеледі:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \qquad (3)$$

Бұл формуладағы

$$\Phi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \ , \qquad (4)$$

Лаплас функциясы, мұндағы $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ және $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Мысал 3. Егер А оқиғасының әр сынақта орындалу ықтималдығы p = 0,2 –ге тең болса, онда 200 тәуелсіз сынақтарда А оқиғасының

а) 40 рет орындалу ықтималдығын;

б) 60 реттен 80 ретке дейін орындалу ықтималдықтарын табу керек.

Шешуі.

а) есеп шарты бойынша: $n = 200; k = 40; p = 0{,}2; q = 0{,}8$

Муавр Лапластың локалдық формуласын қолдансақ:

$$P_{200}(40) \approx \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot \varphi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{32}} \cdot \varphi(x)$$

бұдан $x = \dfrac{40 - 200 \cdot 0{,}2}{\sqrt{200 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 0$

Кестеден $\varphi(0) = 0{,}3989$, осыдан ізделінді ықтималдық:

$$P_{200}(40) \approx \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot \varphi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{32}} \cdot \varphi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{32}} \cdot 0{,}3989 \approx 0{,}07$$

б) 60 реттен 80 ретке дейін орындалу ықтималдығын табайық,

есеп шарты бойынша: $n = 200; k_1 = 60; k_2 = 80; p = 0,2; q = 0,8$

Муавр Лапластың интегралдық формуласын қолданайық:

$$P_{200}(60,80) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

Интегралдың жоғарғы және төменгі шектерін есептейік:

$$x_1 = \frac{60 - 200 \cdot 0,2}{\sqrt{200 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \approx 3,54, \qquad x_2 = \frac{80 - 200 \cdot 0,2}{\sqrt{200 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \approx 7,07.$$

Сонымен: $P_{200}(60,80) \approx \Phi(7,07) - \Phi(3,54)$, кестеден

$\Phi(7,07) \approx 0,5; \quad \Phi(3,54) \approx 0,4996$

Бұдан ізделінді ықтималдық:

$$P_{200}(60,80) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \approx 0,5 - 0,4996 \approx 0,0004.$$

Пуассон формуласы

Егер n өте үлкен сан, ал p өте аз шама ($npq < 9$ болатындай) және $\lambda = np$ шамасы тұрақты болған жағдайда Пуассон формуласы қолданылады.

Пуассон теоремасы. Егер $n \to \infty,\ p \to 0$ болып және $\lambda = np \neq 0$ шамасы тұрақты болса, онда $\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Мысал 4. Телефон станциясында әрбір қоңырау шалу кезінде ақау болу ықтималдығы 0,002. Барлығы 1000 қоңырау шалынған болса, оның ішінде 9 ақау болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Есептің шарты бойынша: n=1000, k=9, p=0,002.
Пуассон формуласы бойынша есептесек:

$$P_{1000}(9) = \frac{(1000 \cdot 0{,}002)^9}{9!} e^{-2} \approx 0{,}00019.$$

Қолданылған әдебиеттер:

1. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. I, II бөлімдер. Алматы 2000 ж.
2. Хисамиев Н.Г. Математика. Оқу құралы. 1, 2 бөлім. Өскемен: ШҚМТУ, 2006. - 271 б.
3. Махмеджанов Н. Жоғары математика есептерінің жинағы: оқу құралы. Алматы: Әл-Фараби ат.ҚазУ. - 2005.-341 б.
4. Қабдықайыр Қ. Жоғары математика. Алматы: Қазақ университеті, 2004. 562 б.
5. Айдос Е. Ж. Жоғары математика Т.2., Т.3. Алматы: Бастау , 2008. - 238 б.
6. Жолымбаев О.М. Математика. Алматы: [б. и.], 2004. - 384 б.
7. Сақабеков Ә. Техникадағы математика. Алматы: ҚБТУ, 2008. - 293 б

Назарларыңызға рахмет!