Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫНЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ. ОҚИҒАЛАР АЛГЕБРАСЫ. КОМБИНАТОРИКАНЫҢ НЕГІЗГІ ФОРМУЛАЛАРЫ

Дәрістік сабақ жоспары:

- **негізгі ұғымдар;**
- **оқиғалар алгебрасы;**
- **комбинаториканың негізгі формулалары;**
- **ықтималдықтың классикалық анықтамасы;**
- **геометриялық ықтималдық**

1. Негізгі ұғымдар

Ықтималдықтар теориясы кездейсоқ құбылыстардың заңдылықтарын зерттейтін ғылым.

Математикалық статистика бақылау нәтижесінде алынған деректерді жинақтау әдістерін көрсету және оларды топтау және ықтималдықтар теориясы көмегімен заңдылықтар құруды қарастырады.

Оқиға деп қандай да бір сынақ (тәжірибе) нәтижесінде пайда болатын бір фактіні айтамыз. ***Белгіленуі***: оқиғаларды латынның бас әріптерімен: $A, B, \ldots,$ ал элементтерін кіші әріптерімен белгілейміз.

Мысалы: Атқыш нысанаға оқ атты. Оқтың атылуы – сынақ, ал оның нысанаға тиюі –оқиға.

Оқиғаға қатысты анықтамалар:

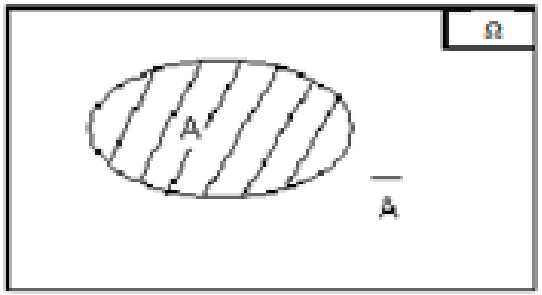
1. Берілген шарттар бойынша сөзсіз орындалатын оқиға *ақиқат оқиға (белгіленуі:* U*)*; мүлдем орындалмайтын оқиғаны *жалған оқиға (белгіленуі:* V*)*; пайда болуы да, болмауы да мүмкін оқиға *кездейсоқ (мүмкін) оқиға (белгіленуі:* $A, B, \ldots$*)* деп атаймыз.
2. Сынақтар нәтижесі *элементар жағдайлар жиынтығы* – Ω (бақыланған барлық оқиғалардың жиынтығы, жүргізілген сынақтың оқиғалар кеңістігі (өрісі)). Егер сынақтың нәтижесі $\omega \in A$ (A оқиғасында жататын болса, мұндағы ω элементар жағдайлар) болса, онда *A оқиғасы пайда болды* деп айтамыз.
3. Егер сынақ нәтижесінде оқиғалардың бірде-біреуінің басқаларына қарағанда бұдан басқа ешқандай мүмкіндігі жоқ деп айтуға негіз бар болса, онда оқиғалар *тең мүмкіндікті оқиғалар* деп аталады.

4. Егер А және В оқиғаларының біреуінің пайда болуы екіншісінің пайда болуын жоққа шығара алмаса, онда олар *үйлесімді оқиғалар* деп аталады. Кері жағдайда, олар *үйлесімсіз оқиғалар* деп аталады.
5. Егер оқиғалар тобының тым болмағанда екі оқиғасы үйлесімді болса, онда *топ үйлесімді*, кері жағдайда, *топ үйлесімсіз* деп аталады.
6. Егер оқиғалар тобының сынақ нәтижесінде міндетті түрде оқиғаларының бірі пайда болатын болса, онда топ *толық топ* құрады деп айтамыз.
7. Толық топ құрайтын жалғыз мүмкіндікті екі оқиғаны *қарама-қарсы оқиғалар* деп айтамыз, *белгіленуі:* А берілген оқиға, ал $\bar{A}$ оның қарама-қарсы оқиғасы.

2. Оқиғалар алгебрасы

Оқиғаларға қолданылатын амалдар:

1. Кез келген А оқиғасы элементар оқиғалар кеңістігінің (жиынының) ішкі жиыны, ал $\bar{A}$ (*А* емес) оның қарама-қарсы оқиғасы болса, онда Вьенна диаграммасы келесі түрде беріледі (сурет 1):



Сурет 1

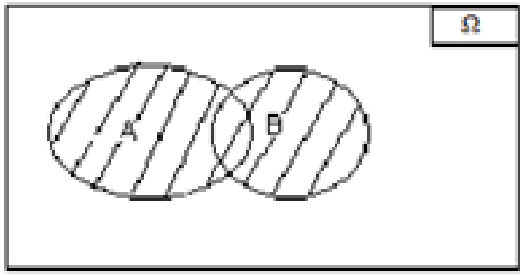
2. Егер А оқиғасы пайда болғанда В оқиғасы сөзсіз пайда болатын болса, онда *А оқиғасы В оқиғасының құрамында жатады* деп айтамыз, *белгіленуі:* $A \subset B$.

3. Егер $A \subset B$ және $B \subset A$ болса, онда $A = B$, яғни, *А және В оқиғалары эквивалентті оқиғалар* деп аталады.

3. Егер $A \subset B$ және $B \subset A$ болса, онда $A=B$, яғни, *A және B оқиғалары эквивалентті оқиғалар* деп аталады.

4. *A және B оқиғаларының қосындысы* немесе *бірігуі* деп тым болмағанда біреуі пайда болғанда пайда болатын оқиғаны айтамыз, *белгіленуі:* $C=A+B$ немесе $C=A \cup B$ (сурет 2).

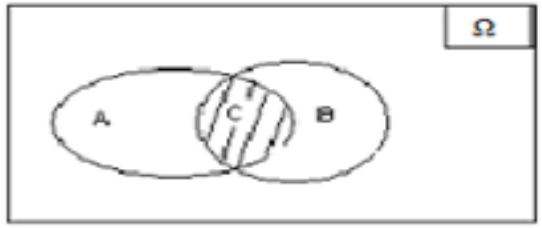
$C=A+B$ (немесе A, немесе B, немесе A және B)



Сурет 2

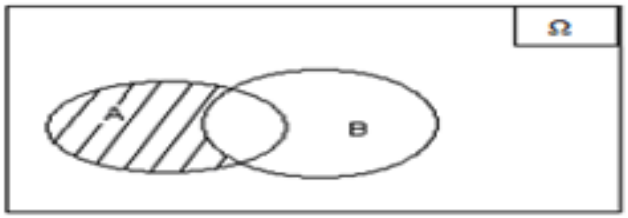
5. *А және В оқиғаларының көбейтіндісі* немесе *қиылысуы* деп олардың бір уақытта бірге пайда болуын айтамыз, *белгіленуі:* $C=A\cdot B$ немесе $C=A\cap B$ (сурет 3).

C=A·B (әрі A, әрі B)



Сурет 3

6. *А және В оқиғаларының айырмасы* деп А оқиғасы орындалып, В оқиғасы орындалмайтын оқиғаны айтамыз: $C=A-B$ или $C=A\setminus B$ (сурет 4).



Сурет 4

7. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғалары толық топ құрса, онда

$$A_1+A_2+\ldots+A_n=U.$$

8. А және В оқиғалары үйлесімсіз оқиғалар болса, онда

$$A \cdot B=V.$$

3. Комбинаториканың негізгі формулалары

Егер бірінен кейін бірі орындалатын k әрекеттің біріншісін n_1, екіншісін n_2 және т.с.с. k - әрекетті n_k әдіспен орындауға болатын болса, онда барлық k әрекетті $n_1 \times n_2 \times n_3 \times .... \times n_k$ әдіспен орындауға болады.

Ω - жиыны n элементтен тұрсын.

Комбинаторика түрлері:

1) Барлық n элементтен n элемент бойынша *қайталанусыз алмастыру* деп айырмашылықтары тек элементтерінің орналасу ретінде болатын топтастыруды атаймыз, *есептелуі*:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, \quad 0! = 1, \quad 1! = 1.$$

Әрқайсысы n_i элементті r ішкі топтан құралған n элементтен тұратын *қайталануы бар алмастырудың есептелуі*:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_r) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}, \quad n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n.$$

2) *Қайталанусыз орналастыру* деп айырмашылықтары не элементтерінің құрамында, не элементтерінің орналасу ретінде болатын әртүрлі n элементтің ішінен k элемент бойынша құралған топтастыруды атаймыз, *есептелуі:*

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

Қайталануы бар орналастырудың есептелуі:

$$A_n^k = n^k.$$

3) Айырмашылықтары тек элементтерінің құрамында болатын әртүрлі n элементтің ішінен k элемент бойынша құралған топтастыруды *қайталанусыз теру* деп атаймыз, *есептелуі*:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{A_n^k}{P_k},$$

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^n = 1, \quad C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Қайталануы бар терудің есептелуі:

$$C_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}.$$

4 Ықтималдықтың классикалық анықтамасы

Анықтама 1. A оқиғасының $P(A)$ *ықтималдығы* деп

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

шамасын айтады, мұндағы m саны - А оқиғасына қолайлы элементар оқиғалар саны, n - тең мүмкіндікті элементар оқиғалар кеңістігінің барлық оқиғалар саны.

Ықтималдықтың қасиеттері:

1. Ақиқат оқиғаның ықтималдығы бірге тең: $P(A)=1$;
2. Жалған оқиғаның ықтималдығы нөлге тең: $P(A)=0$;
3. Кездейсоқ оқиға үшін ықтималдық: $0<P(A)<1$;
4. Кез келген А оқиғасы үшін ықтималдық: $0\le P(A)\le 1$.

Мысалы 1: Урнаға 4 ақ, 9 қара және 7 қызыл бірдей шарлар салынған. Урнадан кез келген бір шар алынды. Алынған шардың ақ болу ықтималдығын табыңыз.

Шешімі: А – ақ шар пайда болу оқиғасы болсын. Элементар оқиғалардың жалпы саны осы урнадағы шарлар санына тең:

$$\omega_i\left(i=\overline{1,20}\right)\Rightarrow n=20,$$

ал А оқиғасына қолайлы элементар оқиғалар саны урнадағы ақ шарлар санына тең:

$$m=4.$$

Ықтималдықтың классикалық анықтамасы бойынша:

$$P(A)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

Мысалы 2: Әрбір А, Қ, Р, Ж, Ы әріптері бөлек карталарға жазылсын. Карталар араластырылып кез келген ретпен бір қатарға орналастырылсын. «ЖАРЫҚ» сөзінің пайда болуының ықтималдығын табыңыз.

Шешімі: Берілген бес картаның бір қатарға әртүрлі орналасуының бір-бірінен айырмашылығы олардың қандай ретпен орналасуында болмақ. Ал орналасуының жалпы саны:

$$n = P_n = n! \Rightarrow P_5 = 5! = 120,$$

ал А оқиғасына қолайлы элементар оқиғалар саны:

$$m = 1.$$

Ықтималдықтың классикалық анықтамасы бойынша:

$$P(A) = \frac{1}{120} \approx 0{,}0083.$$

Анықтама 2. А оқиғасының *қатысты жиілігі* деп

$$\omega(A) = \frac{m}{n}.$$

шамасын айтамыз, мұндағы m - А оқиғасы пайда болатын сынаулар саны, ал n - барлық жүргізілген сынаулар саны.

Анықтама 3. А оқиғасының *статистикалық ықтималдығы* деп жүргізілген сынаулардың үлкен санының қатысты жиілігін айтамыз:

$$P^*(A) = \underset{n\to\infty}{\omega(A)} = \underset{n\to\infty}{\frac{m}{n}}.$$

Зерттеу жұмыстары ұзақ жүргізілген әртүрлі сынауларда n жеткілікті үлкен болған сайын $P^*(A)$ есептелуіндегі өзгеріс өте аз екенін көреміз, яғни статистикалық ықтималдық деп аталатын қандай да бір тұрақты санның маңайында өзгеріссіз тұрып алады.

5 Геометриялық ықтималдық

Ықтималдықтың классикалық анықтамасының кемшіліктерін жеңу мақсатымен, сынақтар жиыны шектеусіз болғанда геометриялық ықтималдық ұғымы енгізілген.

Қандай да бір сынақ нәтижесінде Ω облысына лақтырылған нүктенің $\omega \subset \Omega$ облысына түсу ықтималдығын табу қажет болсын.

А нүктесінің $\omega \subset \Omega$ облысына түсуі *геометриялық ықтималдық* деп аталады:

$$P(A) = \frac{mes\ (\omega)}{mes\ (\Omega)},$$

мұндағы $m(\omega)$, $m(\Omega)$ - сәйкес облыстардың өлшемдері, mes (measure – өлшем: ұзындық, аудан, көлем т.с.с.).

Геометриялық ықтималдылық *бір өлшемді жағдайда*:

$$P(A) = \frac{l}{L},$$

мұндағы l - кіші, L - үлкен ұзындық, $l \subset L$;

екі өлшемді жағдайда:

$$P(A) = \frac{S_к}{S_Y},$$

мұндағы $S_к$ - кіші, S_Y - үлкен аудан, $S_к \subset S_Y$;

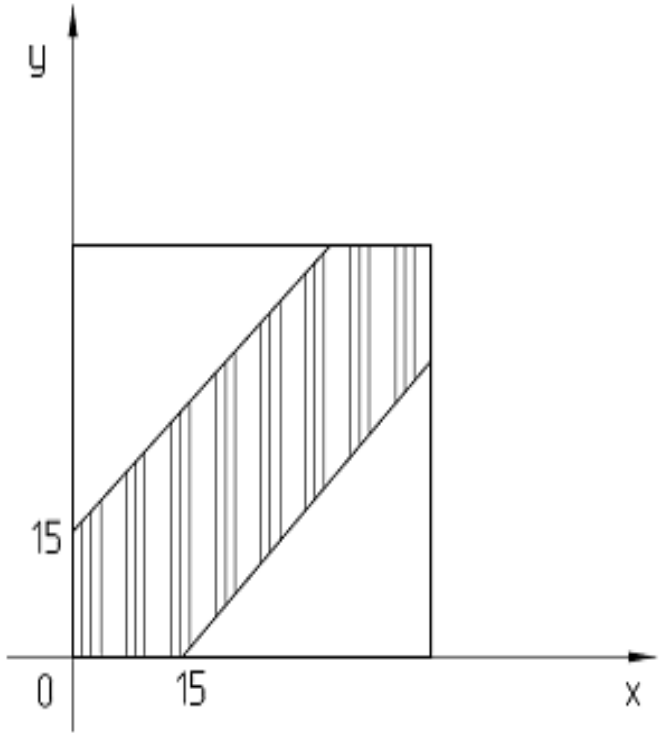
үш өлшемді жағдайда:

$$P(A) = \frac{V_к}{V_Y},$$

мұндағы $V_к$ - кіші, V_Y - үлкен көлем, $V_к \subset V_Y$.

Мысал 3. Екі студент 12^{00} мен 13^{00} уақыт арасында белгілі жерде кездесуге келісті. Бірінші келгені екіншісін 15 минут тосады да, қайтады. Олардың кездесуге келу уақыттары бір-біріне тәуелсіз және көрсетілген уақыт аралығында бірдей мүмкіндікті болса, студенттердің кездесуінің ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. x – бірінші студенттің, y - екінші студенттің келу уақыты.



Сурет 1

Барлық мүмкін оқиғалар облысы (элементар оқиғалар кеңістігі) ауданы $S_y = 60^2$ болатын квадрат (Сурет 1). Студенттер $|x-y| \le 15$ теңсіздігі орындалғанда кездеседі, яғни олардың кезігуінің барлық элементар жиынтығы $x-y=15$ және $x-y=-15$ түзулері арасында жатады. Оның ауданы $S_к = 60^2-(60-15)^2$. Геометриялық ықтималдықтың формуласы бойынша

$$P(A)=\frac{S_к}{S_y}=\frac{60^2-(60-15)^2}{60^2}=\frac{7}{16}=0{,}4375.$$

Қолданылған әдебиеттер:

1. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. I, II бөлімдер. Алматы 2000 ж.
2. Хисамиев Н.Г. Математика. Оқу құралы. 1, 2 бөлім. Өскемен: ШҚМТУ, 2006. - 271 б.
3. Махмеджанов Н. Жоғары математика есептерінің жинағы: оқу құралы. Алматы: Әл-Фараби ат.ҚазУ. - 2005.-341 б.
4. Қабдықайыр Қ. Жоғары математика. Алматы: Қазақ университеті, 2004. 562 б.
5. Айдос Е. Ж. Жоғары математика Т.2., Т.3. Алматы: Бастау , 2008. - 238 б.
6. Жолымбаев О.М. Математика. Алматы: [б. и.], 2004. - 384 б.
7. Сақабеков Ә. Техникадағы математика. Алматы: ҚБТУ, 2008. - 293 б

Назарларыңызға рахмет!