Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

ФУРЬЕ ҚАТАРЫ

Дәрістік сабақ жоспары:

1. Периодты функциялар. Периодты үрдістер (процестер);
2. Фурьенің тригонометриялық қатары;
3. 2π-периодты функциялардың Фурье қатарына жіктеу. Дирихле теоремасы;
4. Жұп және тақ функцияларды Фурье қатарына жіктеу;
5. Кез келген периодты функцияларды Фурье қатарына жіктеу.

11.1 Периодты функциялар. Периодты үрдістер (процестер)

Әртүрлі периодттық құбылыстарды, яғни белгілі уақыт аралығында қайталанатын құбылыстарда (радио техникада, электроникада, автоматты реттеуде, сығылымдық (упругость) теориясында) осы құбылыстарды сипаттайтын периодты фукнцияларды дәрежелік қатарға емес тригонометриялық қатарға жіктеу ыңғайлы.

Егер әрбір $x \in D$ үшін $x+T \in D$ және $f(x+T)=f(x)$ болса, онда $y=f(x), x \in D$ функциясы $T>0$ *периодты* деп аталады.

Периоды T периодты функцияның графигін салу үшін оны T ұзындықты кесіндіде тұрғызып және периодты бүкіл анықталу облысында жалғастыру қажет.

Периодты функцияның негізгі қасиеттері:

- Периоды T периодты функцияның алгебралық қосындысы периоды T периодты функцияны береді.
- Егер $f(x)$ функциясының периоды T болса, онда $f(ax)$ функциясының периоды $\frac{T}{a}$, шындығында

$$f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right)=f(ax+T)=f(ax).$$

- Егер $f(x)$ функциясының периоды T және $[x_0;x_1]\in R$ кесіндісінде интегралданатын болса, онда

$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_b^{b+T} f(x)dx$, кез келген a және $b\in[x_0;x_1]$ үшін.

Қарапайым тригонометриялық функциялар деп $\cos x,\ \sin x$ тригонометриялық функциялары аталады. Периоды 2π, яғни $T=2\pi$.

Қарапайым периодты үрдіс деп

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (11.3)$$

функциясымен анықталатын қарапайым гармониялық тербеліс (қозғалыс), мұндағы $t \geq 0$, A - тербеліс амплитудасы, ω - жиілік, φ_0 - бастапқы фаза.

Бұл түрдегі функция және оның графигі *қарапайым гармоника* деп аталады. (11.3) функциясының негізгі периоды $T=\frac{2\pi}{\omega}$, яғни бір толық тербеліс $\frac{2\pi}{\omega}$ уақыт аралығында жүргізіледі (ω жиілігі нүктенің 2π уақыт бірлігі ағымында қанша тербеліс жасайтынын көрсетеді).

(11.3) формуласын түрлендірсек

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0) = A\sin\omega t \cdot \cos\varphi_0 + A\cos\omega t \cdot \sin\varphi_0 = a\cos\omega t + b\sin\omega t \quad (11.4)$$

мұндағы $a = A \cdot \sin\varphi_0$, $b = A \cdot \cos\varphi_0$. Бұдан қарапайым гармониялық тербеліс $\sin\omega t, \cos\omega t$ функцияларымен сипатталатыны шығады.

Шектік (немесе шексіз) қарапайым гармоника сандарының қабаттасуынан пайда болатын күрделі гармониялық тербеліс те $\sin\omega t, \cos\omega t$ функцияларымен сипатталады.

$$\varphi(t) = A_0 + A_1\sin(t + \varphi_1) + A_2\sin(2t + \varphi_2) + \ldots + A_{30}\sin(30t + \varphi_{30}) =$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{30} A_n \sin(nt + \varphi_n)$$

немесе

$$\varphi(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{30} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

функциясы күрделі гармониялық тербелісті береді.

Бірінші гармоника периоды $T_1 = 2\pi$, екіншісінікі $T_2 = \frac{2\pi}{2}$, үшіншісінікі $T_3 = \frac{2\pi}{3}$,...., отызыншысынікі $T_{30} = \frac{2\pi}{30}$, ал $y = A_0$ функциясының периоды кез келген сан (нөлдік гармоника), онда $\varphi(t)$ функциясының периоды 2π.

Қарапайым гармоникаларды бір-біріне қосқанда, біз күрделі периодты тербелісті/ периодты процесті сипаттайтын периодты функцияны алатынымыз анық.

Кез келген периодты құбылыстарды сипаттайтын периодты функцияны қарапайым гармоникалардың қосындысы түрінде жазуға бола ма?

Егер болса, онда осы әр гармониканың белгісіз пааметрлерін коэффициенттерін қалай анықтаймыз?

11.2 Фурьенің тригонометриялық қатары

Тригонометриялық қатардың көмегімен кез келген периодты функцияны мүшелері қарапайым гармоника болатын қатар түрінде көрсетуге болады.

Тригонометриялық қатар деп

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (11.5)$$

функциялық қатарын айтамыз, мұндағы $a_0, a_n, b_n \quad (n=1,2,\ldots)$ сандары қатардың коэффициенттері деп аталады.

(11.5) қатарын

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx+\varphi_n) \qquad (11.6)$$

түрінде жазуға болады, мұндағы,

$$a_n = A_n\sin\varphi_n,$$

$$b_n = A_n\cos\varphi_n$$

Онда

$$a_n\cos nx + b_n\sin nx = A_n\sin(nx+\varphi_n)$$

Демек (11.5) қатары (11.6) түріне келтіріледі және

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},\quad tg\varphi_n=\frac{a_n}{b_n},$$

қатардың бос мүшесі $\frac{a_0}{2}$.

Есептеулерде қолданылатын формулаларды келтіреміз (мұндағы m және n бүтін оң сандар):

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=\begin{cases}\left.\dfrac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}=0,\ n\neq 0\\ \left.x\right|_{-\pi}^{\pi}=2\pi,\quad n=0\end{cases} \tag{11.7}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=0,\ \text{кез келген } n \text{ үшін;} \tag{11.8}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n\end{cases} \tag{11.9}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x)dx=0 \tag{11.10}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(m-n)x+\cos(m+n)x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n\end{cases} \tag{11.11}$$

Ескерту:

1) (11.7)-(11.11) формулалары

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$

функциясының жиынтығы ортогональдық қасиетке ие: ұзындығы 2π интервалында осы жиынның кез келген екі функциясының көбейтіндісінің интегралы нөлге тең;

2) (11.7)-(11.11) формулалары интегралдау облысы $[0; 2\pi]$ кесіндісі болса да орынды.

$f(x)$ функциясы ерікті периодты $T = 2\pi$ периодтық функция болсын. $f(x)$ функциясы тригонометриялық қатарға жіктелсін, яғни $f(x)$ функциясы (11.5) қатарының қосындысы түрінде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (11.12)$$

берілсін. $f(x)$ функциясы (қатар қосындысы да) 2π периодты, онда оны кез келген 2π ұзындықты аралықта қарастыруға болады.

Негізгі аралық негізінде $[-\pi,\pi]$ кесіндісін (сондай-ақ $[0;2\pi]$ кесіндісін) және (11.12) қатарын осы кесіндіде мүшелеп интегралдауға болады. a_n, b_n коэффициенттерін есептейміз. Ол үшін (11.12) теңдігінің екі жағын $-\pi$ мен π аралығында интегралдаймыз.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \pi a_0$$

нөлдік мүшесінен басқа барлық мүшелерінің интегралы (11.7) және (11.8) формулаларының көмегімен нөлге тең. Бұдан

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad (11.13)$$

(11.10) теңдігінің екі жағын $\cos mx$ функциясына көбейтіп $-\pi$ мен π аралығында алынған қатарды интегралдасақ:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx \right).$$

(11.7), (11.9) және (11.10) формулалары көмегімен соңғы теңдіктен $m = n$ болса

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = a_n \pi .$$

Бұдан

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n = 1,2,3,... \qquad (11.14)$$

Сәйкесінше (11.12) теңдігінің екі жағын $\sin mx$ функциясына көбейтіп $-\pi$ мен π аралығында алынған қатарды интегралдасақ:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n = 1,2,3,... \qquad (11.15)$$

(11.13)-(11.15) формулаларымен анықталатын a_0, a_n, b_n сандары $f(x)$ функциясының Фурье коэффициенттері деп аталады, осындай коэффициентті (11.5) тригонометриялық қатары $f(x)$ функциясының *Фурье қатары* деп аталады.

$[-\pi,\pi]$ кесіндісінде интегралданатын $f(x)$ функциясы

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

түрінде жазылады. $f(x)$ функциясы Фурье қатарына сәйкес келеді. Егер Фурье қатары жинақты болса, онда оның қосындысын $S(x)$ деп белгілейміз.

11.3 2π-периодты функциялардың Фурье қатарына жіктеу. Дирихле теоремасы

Функцияның $f(x)$ Фурье қатарының жинақтылық жағдайын және оның қосындысы дәл сол функция $f(x)$ болатын шарттарды анықтайық. Басқаша айтқанда, сәйкестік белгісін $(\sim)$ теңдік белгісімен $(=)$ ауыстыруға болатын шарттарды қарастырамыз.

Периоды $T = 2\pi$ болатын $f(x)$ функцияларын қарастырамыз. Мұндай функциялар 2π-*периодты* деп аталады.

Функцияның Фурье қатарына жіктелуінің жеткілікті шартын беретін теореманы тұжырымдаймыз.

Теорема 11.1 (Дирихле теоремасы). 2π-периодты $f(x)$ функциясы $[-\pi,\pi]$ кесіндісінде мына екі шартты қанағаттандырсын:

1. $f(x)$ *бөлікті-үзіліссіз*, яғни үзіліссіз немесе бірінші текті үзіліс нүктелерінің саны шектеулі;
2. $f(x)$ *бөлікті-монотонды*, яғни барлық кесінді бойынша монотонды немесе бұл кесіндіні функция әрқайсысында монотонды болатын шектеулі сан аралықтарға бөлуге болады.

Онда $f(x)$ функциясына сәйкес Фурье қатары осы кесіндіде жинақталады және:

1. Функцияның үзіліссіз нүктелерінде қатар қосындысы $S(x)$ функцияның өзімен сәйкес келеді:
   $S(x)=f(x)$.
2. Функцияның әрбір x_0 үзіліс нүктесінде қатар қосындысы мынаған тең болады:
   $$S(x_0)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2},$$
   яғни $f(x)$ функцияның оң жақтан және сол жақтан шектерінің арифметикалық ортасына тең;
3. $x=-\pi$ және $x=\pi$ нүктелерінде (кесіндінің шеткі нүктелерінде) қатар қосындысы мынаған тең болады:
   $$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

Сондықтан, егер $f(x)$ функциясы теореманың 1 және 2 шарттарын (Дирихле шарттарын) қанағаттандырса, онда $[-\pi,\pi]$ кесіндісінде (11.12) жіктелу орын алады:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx,$$

ал коэффициенттер (11.13)-(11.15) формулаларымен есептеледі. Бұл теңдік тек $f(x)$ функциясының үзіліс нүктелерінде және $[-\pi,\pi]$ кесіндісінің шеттерінде бұзылуы мүмкін.

Бастапқы функцияның периодтылығына және Фурье қатарының қосындысына байланысты, көрсетілген жіктелу функцияның анықталу облысының барлық нүктелерінде алуға болады.

Ескертулер.

1. Егер периодты 2π болатын $f(x)$ функциясы $[0, 2\pi]$ кесіндісінде Дирихле шарттарын қанағаттандырса, онда ол үшін (11.12) жіктелу орын алады, мұндағы коэффициенттер мына формулалармен есептеледі:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx, \quad n = 1,2,3,...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n = 1,2,3,...$$

($\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ және $\int_0^{2\pi} f(x)dx$ интегралдары периодты функцияның 3-қасиеті бойынша тең)

2. Дирихле шарттары математикада және оның қолданыстарында кездесетін функциялардың көпшілігін қанағаттандырады. Дирихле шарттарын қанағаттандырмайтын, бірақ Фурье қатарына жіктелуге болатын функциялар да бар, яғни Дирихле теоремасы жіктелуге жеткілікті шартты ғана береді, бірақ қажетті емес.

11.1-мысал. Периоды 2π болатын, $[-\pi,\pi]$ кесіндісінде мына формуламен берілген $f(x)$ функциясын Фурье қатарына жіктеу керек:

$$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{егер } 0\le x\le \pi,\\ -x, & \text{егер } -\pi\le x<0.\end{cases}$$

Шешімі: 11.1-суретте $f(x)$ функциясының графигі көрсетілген. Бұл функция Дирихле шарттарын қанағаттандырады, демек, ол Фурье қатарына жіктеледі. Қатар коэффициенттерін табамыз:

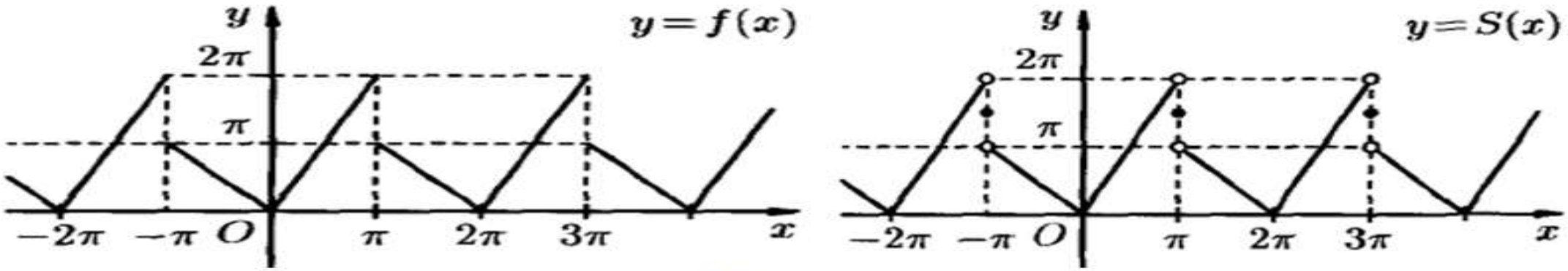
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2xdx = \frac{3\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2x\cos nxdx =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = x \\ dv = \cos nxdx \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} du = dx \\ v = \frac{1}{n}\cos nx \end{matrix}\right| = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}\right) +$$

$$+\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right) = -\frac{1}{\pi n^2}(1-\cos\pi n) + \frac{2}{\pi n^2}(\cos\pi n - 1) =$$

$$= -\frac{3}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)$$



11.1-сурет

Сол сияқты табатынымыз:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \ldots = \frac{1}{n}(-1)^{n+1}.$$

$f(x)$ бастапқы функциясына мынадай Фурье қатары сәйкес келеді

$$f(x) \sim \mathrm{S}(x) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{3}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos nx + \frac{1}{n}(-1)^{n+1}\cos nx.$$

$f(x)$ функциясы $[-\pi,\pi]$ кесіндісінің барлық ішкі нүктелерінде үзіліссіз, сондықтан Дирихле теоремасы бойынша осы нүктелердің барлығында $f(x)=S(x)$ теңдігі орын алады, яғни

$$f(x)=\mathrm{S}(x)=\frac{3\pi}{4}-\frac{6}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)+\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3}-\ldots\right)$$

$x=\pm\pi$ нүктелерінде $S(x)$ қатар қосындысы мынаған тең болады

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{\pi+2\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}.$$

$f(x)$ және $S(x)$ функцияларының графиктері 11.1-суретте көрсетілген.

11.4 Жұп және тақ функцияларды Фурье қатарына жіктеу

Егер $[-\pi,\pi]$ кесіндісінде Фурье қатарына жіктелетін $f(x)$ функциясы *жұп* немесе *тақ* болса, онда бұл Фурье коэффициенттерінің формулаларына әсер етеді (оларды есептеу жеңілдейді) және қатардың түріне де әсер етеді (ол *толық емес* деп аталатын қатарға айналады).

Егер $f(x)$ функциясы *жұп* болса, онда оның Фурье қатары мына түрде болады:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx, \qquad (11.16)$$

мұндағы

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx, \quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx, \quad n\in N. \qquad (11.17)$$

Егер $f(x)$ функциясы *тақ* болса, онда оның Фурье қатары мына түрде болады:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{11.18}$$

мұндағы

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n\in N \tag{11.19}$$

Белгілі болғандай, $f(x)$ функциясы $[-a;a]$ симметриялы кесіндісінде интегралданса, онда:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\begin{cases} 2\int_0^{a} f(x)dx, & \text{егер } f(x) - \text{жұп функция,} \\ 0, & \text{егер } f(x) - \text{тақ функция.} \end{cases} \tag{11.20}$$

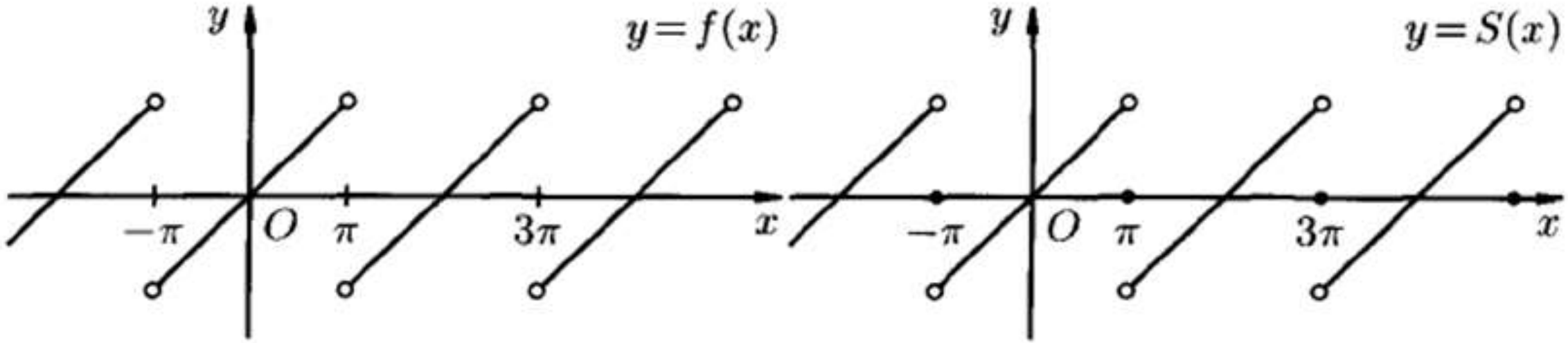
Егер $f(x)$ функциясы жұп болса, онда $f(x)\cos nx$ - жұп функция ($f(-x)\cos(-nx)=f(x)\cos nx$), ал $f(x)\sin nx$ - тақ функция ($f(-x)\sin(-nx)=-f(x)\sin nx$).

Егер $f(x)$ функциясы тақ болса, онда, анық, $f(x)\cos nx$ функциясы тақ, ал $f(x)\sin nx$ - жұп болады.

(11.20) формуласын ескере отырып, (11.13)-(11.15) формулаларынан (11.16) - (11.19) формулаларын аламыз.

(11.16) және (11.18) қатарлары *толық емес* тригонометриялық қатарлар деп аталады, немесе сәйкесінше косинустар бойынша қатарлар және синустар бойынша қатарлар деп аталады.

11.2-мысал: $f(x)=x$, $x\in(-\pi;\pi)$, $T=2\pi$ функциясын Фурье қатарына жіктеу.



11.2-сурет

Шешімі: 11.2-суретте берілген функцияның графигі көрсетілген. $y=x$ функциясы Дирихле шарттарын қанағаттандырады. Бұл функция - тақ. Демек, $a_n=0$, $n=0,1,\ldots$, ал

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\right)\cos nx,$$

яғни $b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$ $(n \in N)$. Фурье қатары тек синустардан тұрады:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right).$$

Бұл жағдайда $S(\pm\pi) = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0$ (11.2-суретті қараңыз).

11.5 Кез келген периодты функцияларды Фурье қатарына жіктеу

Фурье қатарына периодты функцияларды 2π-ден өзгеше периодпен де жіктеуге болады.

$[-l;l]$ кесіндісінде анықталған $f(x)$ функциясы $2l$ периодына ие болсын $f(x+2l)=f(x)$, мұндағы l - кез келген оң сан) және осы кесіндіде Дирихле шарттарын қанағаттандырсын.

$x=\frac{l}{\pi}t$ алмастыруын жасасақ, берілген $f(x)$ функциясы

$\varphi(t)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ функциясына түрленеді, ол $[-\pi;\pi]$ кесіндісінде анықталады және $T=2\pi$ периодына ие болады.

Шынында да, егер $t=-\pi$ болса, онда $x=-l$, ал егер $t=\pi$ болса, онда $x=l$ және $-\pi<t<\pi$ кезінде $-l<x<l$ болады;

$$\varphi(t+2\pi)=f\left(\frac{l}{\pi}(t+2\pi)\right)=f\left(\frac{l}{\pi}t+2\pi l\right)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right)=\varphi(t),$$

яғни $\varphi(t+2\pi)=\varphi(t)$.

φ(t) функциясының $[-\pi;\ \pi]$ кесіндісіндегі Фурье қатарына жіктелуі мына түрде болады:

$$\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt+b_n\sin nt \qquad (11.21)$$

мұндағы

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos ntdt,\quad (n=0,1,2,\ldots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin ntdt,\quad (n=1,2,\ldots),$$

x айнымалыға қайта оралып, $t = \frac{\pi x}{l}$, $dt = \frac{\pi}{l} dx$, екенін ескерсек, мынаны аламыз:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \qquad (11.22)$$

мұндағы

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n t}{l} dx, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n t}{l} dx, \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (11.23)$$

(11.22) формулаларымен есептелетін коэффициенттері бар (11.23) қатары $T=2l$ периодты $f(x)$ функциясы үшін *Фурье қатары* деп аталады.

Ескерту. 2π-периодты функциялардың Фурье қатарлары үшін орындалатын барлық теоремалар периодты $T=2l$ болатын функциялардың Фурье қатарлары үшін де дәл қалпында қолданылады. Атап айтқанда, егер $f(x)$ функциясы $[-l;l]$ кесіндісінде *жұп* болса, онда оның Фурье қатары мына түрде болады:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}, \qquad (11.24)$$

мұндағы

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx, \quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nt}{l}dx, \quad n=1,2,..., \qquad (11.25)$$

Егер $f(x)$ функциясы *тақ* болса, онда

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{l} \qquad (11.26)$$

мұндағы

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx, \quad n=1,2,.... \qquad (11.27)$$

11.3-мысал: $f(x)=x$ функциясын $(-4;4)$ аралығында Фурье қатарына жіктеу.

Шешімі: Берілген функция тақ, Дирихле шарттарын қанағаттандырады. (11.26) және (11.27) формулалары бойынша, $l=4$ болғанда:

$$x=\sum_{i=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l},$$

мұндағы

$$b_n=\frac{2}{4}\int_0^4 x\sin\frac{\pi n x}{l}dx, \quad n=1,2,3,\ldots.$$

b_n-ді есептейміз:

$$b_n=\frac{1}{2}\left(-x\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^4+\frac{4}{\pi n}\frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^4\right)=-\frac{8}{\pi n}\cos\pi n=\frac{8}{\pi n}(-1)^{n+1}, \quad n=1,2,3,\ldots.$$

Онда барлық x үшін $-4<x<4$ аралығындағында

$$x=\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{4}}{1}-\frac{\sin\frac{2\pi x}{4}}{2}+\frac{\sin\frac{3\pi x}{4}}{3}-\ldots\right).$$

Қайталау сұрақтары

Периодты функциялар. Периодты үрдістер

1. Периодты функция дегеніміз не? Өмірде кездесетін периодты құбылыстарға мысал келтіріңіз.
2. Периодты функцияның негізгі қасиеттерін сөзбен түсіндіріңіз. Екі периодты функцияны қосқанда не болады? Аргументті тұрақты санға көбейткенде период қалай өзгереді?
3. Периодты функцияның графигін салу үшін не істеу керек? Неліктен бір периодта салып, сосын қайталау жеткілікті?
4. Қарапайым гармониялық тербеліс дегеніміз не? Оны сипаттайтын физикалық шамаларды атаңыз (амплитуда, жиілік, фаза). Олардың әрқайсысы тербелістің қандай сипатын білдіреді?



5. Жиілік пен периодтың арасында қандай байланыс бар? Жиілік үлкен болса, период туралы не айтуға болады?

6. Қарапайым гармониялық тербелісті неліктен синус пен косинус арқылы өрнектейді? Осы екі өрнектің айырмашылығы неде?

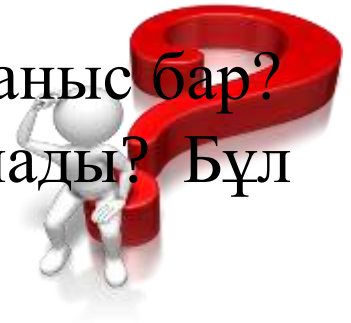
7. Күрделі гармониялық тербеліс дегеніміз не? Ол қарапайым гармоникалардан қалай алынады?

8. Кез келген периодты құбылысты қарапайым гармоникалардың қосындысы түрінде жазуға бола ма? Бұл сұраққа Фурье қатары қалай жауап береді?



11.2 Фурьенің тригонометриялық қатары

1. Тригонометриялық қатар дегеніміз не? Оның мүшелері қандай функциялардан тұрады?
2. Тригонометриялық қатардың коэффициенттері қандай мағына береді? Олар әр гармониканың үлесін қалай көрсетеді?
3. Функциялар жүйесінің ортогональдық қасиеті дегеніміз не? Синус пен косинустардың осы қасиеті неліктен маңызды?
4. Ортогональдық қасиетті қарапайым тілмен түсіндіріңіз. Егер екі функция ортогональды болса, олардың графиктері қандай ерекшелікке ие?
5. Фурье коэффициенттері қалай анықталады? Неліктен дәл осылай есептеу керек?
6. Фурье коэффициенттерін есептеу кезінде ортогональдық қасиет қалай қолданылады?
7. Фурье қатары мен Фурье коэффициенттерінің арасында қандай байланыс бар?
8. Фурье қатары жазылғанда неліктен sim (тильда) белгісі қолданылады? Бұл белгі нені білдіреді?



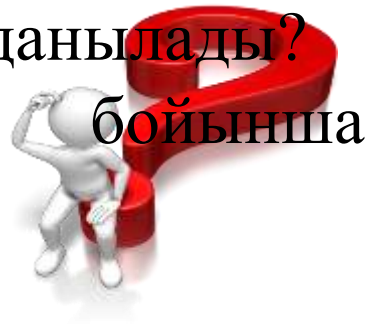
11.3 2π-периодты функциялардың Фурье қатарына жіктеу. Дирихле теоремасы

1. Дирихле теоремасы қандай шарттарды қарастырады? Бұл шарттарды сөзбен түсіндіріңіз.
2. Функцияның бөлікті-үзіліссіздігі дегеніміз не? Қандай үзіліс түрлерін білесіз?
3. Функцияның бөлікті-монотондылығы дегеніміз не? Бұл шарт нені білдіреді?
4. Дирихле теоремасы бойынша, функцияның үзіліссіз нүктелерінде Фурье қатарының қосындысы неге тең?
5. Функцияның үзіліс нүктесінде Фурье қатарының қосындысы қалай есептеледі? Неліктен дәл осылай?
6. Кесіндінің шеткі нүктелерінде Фурье қатарының қосындысы қандай болады? Бұл нүктелер неліктен ерекше?
7. Дирихле теоремасының шарттары орындалмаса, Фурье қатары туралы не айтуға болады? Бұл шарттар жеткілікті ме, әлде қажетті ме?
8. 11.1-мысалдағы функцияның үзіліс нүктесінде не болды? Неліктен сол нүктеде қатар қосындысы функцияның мәніне тең емес?



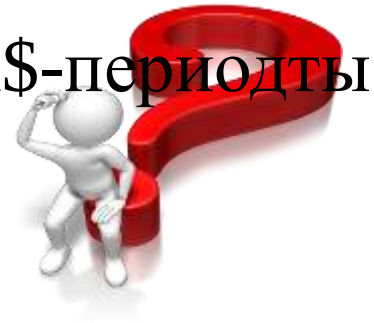
11.4 Жұп және тақ функцияларды Фурье қатарына жіктеу

1. Жұп функция дегеніміз не? Графигі қандай симметрияға ие? Мысал келтіріңіз.
2. Тақ функция дегеніміз не? Графигі қандай симметрияға ие? Мысал келтіріңіз.
3. Жұп функцияның Фурье қатарында қандай гармоникалар болады? Неліктен синустар болмайды?
4. Тақ функцияның Фурье қатарында қандай гармоникалар болады? Неліктен косинустар болмайды?
5. Симметриялық кесіндідегі интегралдың қасиетін сөзбен түсіндіріңіз. Жұп функцияның интегралы неліктен екі еселенеді? Тақ функцияның интегралы неліктен нөлге тең?
6. Косинустар бойынша қатар дегеніміз не? Ол қандай функцияларға қолданылады?
7. Синустар бойынша қатар дегеніміз не? Ол қандай функцияларға қолданылады?
8. 11.2-мысалдағы $f(x)=x$ функциясы неліктен тек синустар бойынша жіктелді? Осы функцияның қандай қасиетіне байланысты?



11.5 Кез келген периодты функцияларды Фурье қатарына жіктеу

1. Периоды π-ден басқа санға тең функцияны Фурье қатарына қалай жіктеуге болады?
2. Айнымалыны түрлендіру әдісінің мәні неде? Неліктен кез келген периодты функцияны 2π -периодты функцияға келтіруге болады?
3. Периоды 2l болатын функцияның Фурье қатары 2π-периодты функцияның қатарынан қандай айырмашылығы бар?
4. Периоды 2l болатын жұп функцияның Фурье қатары қандай түрде болады?
5. Периоды 2l болатын тақ функцияның Фурье қатары қандай түрде болады?
6. 11.3-мысалдағы функция неліктен (-4,4) аралығында тек синустар бойынша жіктелді?
7. 2π -периодты функциялар үшін дәлелденген теоремалар $2l$-периодты функциялар үшін де қолданыла ма? Неліктен?



Әдебиеттер тізімі

1. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. I, II бөлімдер. Алматы 2000 ж.
2. Хисамиев Н.Г. Математика. Оқу құралы. 1, 2 бөлім. Өскемен: ШҚМТУ, 2006. - 271 б.
3. Махмеджанов Н. Жоғары математика есептерінің жинағы: оқу құралы. Алматы: Әл-Фараби ат.ҚазУ. - 2005.-341 б.
4. Қабдықайыр Қ. Жоғары математика. Алматы: Қазақ университеті, 2004. 562 б.
5. Айдос Е. Ж. Жоғары математика Т.2., Т.3. Алматы: Бастау , 2008. - 238 б.
6. Жолымбаев О.М. Математика. Алматы: [б. и.], 2004. - 384 б.
7. Сақабеков Ә. Техникадағы математика. Алматы: ҚБТУ, 2008. - 293 б

Назар аударғаныңызға рақмет!

