Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

ФУНКЦИЯЛЫҚ ҚАТАРЛАР

Дәрістік сабақ жоспары:

1. **Функциялық және дәрежелік қатарлар;**
2. **Дәрежелік қатардың жинақтылығы;**
3. **Дәрежелік қатардың жинақтылық радиусы және интервалы;**
4. **Дәрежелік қатардың қасиеттері;**
5. **Функцияның дәрежелік қатарларға жіктелінуі;**
6. **Тейлор және Маклорен қатарлары.**

Анықтама 1: Мүшелері x айнымалысынан тәуелді функциялар болатын

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

қатары *функциялық қатар* деп аталады.

x айнымалысына x_0 мәнін берсек

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots \qquad (2)$$

жинақты немесе жинақсыз болатын сандық қатарын аламыз.

Анықтама 2: Егер алынған (2) сандық қатары жинақты болса, онда x_0 нүктесі (1) функциялық қатарының *жинақтылық нүктесі*, ал (2) сандық қатары жинақсыз болса, онда x_0 нүктесі (1) функциялық қатарының *жинақсыздық нүктесі* деп аталады.

Анықтама 3: x аргументінің функциялық қатар жинақты болатын сандық мәндерінің жиынын *жинақтылық облысы* деп атаймыз.

Функциялық қатардың жинақтылық облысында оның *қосындысы* x айнымалысынан тәуелді функцияны береді:

$$S = S(x).$$

$S(x)$ қосындысы жинақтылық облысында

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) \qquad (3)$$

теңдігімен анықталады, мұндағы

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

қатардың дербес қосындысы.

Мысал 1: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

Шешімі: Берілген $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^{3\cdot} + \ldots + x^n + \ldots$ қатары еселігі $q = x$ болатын геометриялық қатар. Демек, бұл қатар $|x| < 1$ болса жинақты, яғни $x \in (-1;1)$.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Мысал 2: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$ функциялық қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Берілген қатардың абсолюттік шамасынан қатар құрайық:

$$\left|\frac{\sin x}{1^2}\right| + \left|\frac{\sin 2^2 x}{2^2}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| + \ldots .$$

Кез келген $x \in R$ үшін

$$\left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2},$$

ал жалпы мүшесі $\frac{1}{n^2}$ болатын $(\lambda = 2 > 1)$ жалпы гармониялық қатар жинақты. Үлкен қатардың жинақтылығынан кіші қатардың жинақтылығы алынады. Онда берілген қатар барлық $x \in R = (-\infty; +\infty)$ үшін абсолютті жинақты болады.

2. Дәрежелік қатарлар.

Анықтама 4: Мүшелері x аргументті дәрежелік функциялар болатын қатар

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (4)$$

дәрежелік қатар деп аталады.

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ нақты сандары (4) қатарының коэффициенттері; $x \in R$ - нақты айнымалы. (4) қатары x дәрежесі бойынша алынған. Дәрежелік қатарды $(x - x_0)$ дәрежесі бойынша алсақ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots \qquad (5)$$

қатарын аламыз, мұндағы x_0 кез келген тұрақты сан. $x - x_0 = z$ деп алсақ, онда (4) қатарын аламыз.

3. Дәрежелік қатардың жинақтылығы.

(4) дәрежелік қатарының жинақтылығын қарастырайық. (4) дәрежелік қатарының жинақтылық облысы ең болмағанда $x = 0$ нүктесіне ие болады. ((5) қатары $x = x_0$ нүктесінде жинақты).

Абель теоремасы: Егер (4) дәрежелік қатары $x = x_0 \neq 0$ болғанда жинақты болса, онда ол

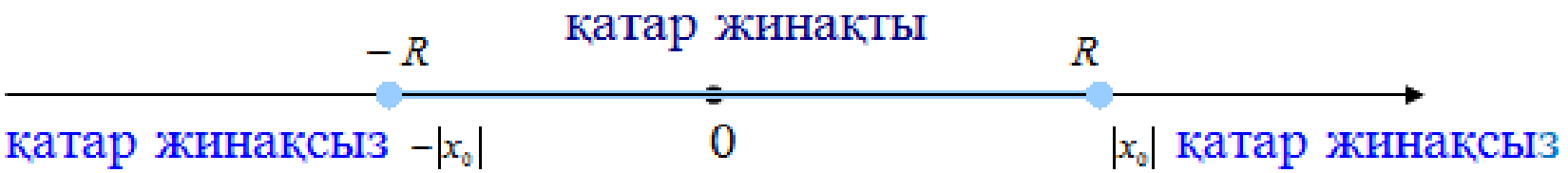
$$|x| < |x_0|$$

теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x мәнінде абсолютті жинақты болады.

Салдар: Егер (4) дәрежелік қатары $x = x_1$ болғанда жинақсыз болса, онда ол $|x| > |x_1|$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x мәнінде жинақсыз болады.

4. Дәрежелік қатардың жинақтылық радиусы және интервалы

Егер $x_0 \neq 0$ болса Абель теоремасы бойынша дәрежелік қатардың жинақтылық нүктесі бар, онда $(-|x_0|;|x_0|)$ интервалы берілген қатардың барлық жинақтылық нүктелерінен тұрады, ал интервалдан тыс x-тің барлық мәндерінде (4) қатары жинақсыз:



сурет 1

$(-|x_0|;|x_0|)$ дәрежелік қатардың *жинақтылық интервалы* деп аталады.

$|x_0| = R$ десек, жинақтылық интервалын $(-R;R)$ түрінде жазуға болады.

R санын дәрежелік қатардың *жинақтылық радиусы* деп атаймыз, яғни $R>0$ саны барлық $|x_0|<R$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x үшін (4) қатары абсолютті жинақты, ал $|x_0|>R$ болса, қатар жинақсыз (сурет 1).

- Дербес жағдайда (4) қатары тек бір $x_0=0$ нүктесінде жинақты, онда $R=0$ деп санаймыз;
- Егер (4) қатары x -тің барлық мәнінде $x\in R$ (сан өсінің барлық нүктелерінде) жинақты болса, онда $R=\infty$. Жинақтылық интвалдарының ұштарында (яғни $x=-R$ және $x=R$) қатардың жинақтылығы әр жағдайда жекелей қарастырылады.

(4) дәрежелік қатарының жинақтылық радиусын табу үшін берілген дәрежелік қатардың мүшелерінің абсолюттік шамасынан қатар құраймыз:

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots,$$

Даламбер белгісін қолдансақ

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0, \quad x \neq 0.$$

Даламбер белгісі бойынша қатар жинақты, егер

$$|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,$$

яғни $|x| < \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ болса.

(4) дәрежелік қатарының мүшелерінің абсолюттік шамасынан құралған қатар барлық x үшін

$$|x| > \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

болғанда жинақсыз.

(4) дәрежелік қатарының абсолюттік жинақтылығының радиусы

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (6)$$

Кошидің радикалдық белгісін қолдансақ, онда жинақтылық радиусы

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (7)$$

формуласымен табылады.

Ескерту:

- Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$ болса, онда (4) дәрежелік қатары бүкіл сан өсінде абсолютті жинақты, бұл жағдайда $R=\infty$. Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\infty$ болса, онда $R=0$.
- (5) дәрежелік қатарының жинақтылық интервалы $|x-x_0|<R$ теңсіздігінен табылады. $(x_0-R;x_0+R)$ түрінде жазылады.
- Егер дәрежелік қатар x-тің барлық дәрежелерін қамтымаса, яғни толық емес дәрежелік қатар берілсе, онда қатардың жинақтылығының интервалы жинақтылық радиусының анықтамасынсыз ((6), (7) формулаларының көмегінсіз) берілген қатардың мүшелерінің абсолюттік шамасынан құралған қатарға тікелей Даламбер (Коши) белгілерін қолдану арқылы табылады.

1-мысал: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{n}}$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

Шешімі:

a) Дәрежелік қатардың жинақтылық радиусын табу

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

формуласын қолданамыз.

b) $a_n = \dfrac{3^n}{\sqrt{n}}; \quad a_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}};$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^n}{\sqrt{n}}}{\frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{3\sqrt{n}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3},$$

яғни $-\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{3}$ жинақтылық облысы болады.

Енді интервалдың шекаралық нүктелерінде қатардың жинақтылығын зерттейік:

1) $x = -\frac{1}{3}$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ қатары жинақты, себебі Лейбниц белгісінің шарттары орындалады:

а) $1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \ldots$ б) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

2) $x = \frac{1}{3}$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ қатар жинақсыз (Дирихле қатары $\alpha = \frac{1}{2} < 1$).

Олай болса, жинақтылық облысы $-\frac{1}{3} \le x < \frac{1}{3}$.

c) Жауабы: $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

2-мысал: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n^2}$ қатарының жинақтылық облысын анықтау керек.

Шешімі:

a) Дәрежелік қатардың жинақтылық радиусын табу

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$$

формуласын қолданамыз.

b) $a_n = \dfrac{1}{2^n n^2}$;

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{1}{2^n n^2}}} = 2\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 2,$$

яғни $(-2; 2)$ жинақтылық облысы болады.

Енді интервалдың шекаралық нүктелерінде қатардың жинақтылығын зерттейік:

1) $x=-2$ болсын. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ қатары абсолютті жинақты болады, себебі мүшелерінің абсолюттік шамасы бойынша алынған қатар жинақты.

2) $x=2$ болсын. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ қатарын қарастырайық. Бұл қатарда жинақты (Дирихле қатары, $\alpha=2>1$).

Олай болса, жинақтылық облысы $-2\le x\le 2$.

c) Жауабы: $[-2;2]$.

5. Дәрежелік қатардың қасиеттері

- (4) дәрежелік қатарының $S(x)$ қосындысы $(-R;R)$ жинақтылық интервалында үзіліссіз функция болады;
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ және $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ дәрежелік қатарларының жинақтылық радиусы R_1 және R_2 болса, оларды мүшелеп қосуға, азайтуға, көбейтуге болады; Қатардың қосындысының, айырмасының, көбейтіндісінің жинақтылық радиусы R_1 және R_2 сандарынан кем болмайды;
- Жинақтылық интервалының ішінде дәрежелік қатарды мүшелеп дифференциалдауға болады, онда

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (8)$$

қатары үшін $-R < x < R$ болғанда

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots \qquad (9)$$

теңдігі орынды.

- Жинақтылық интервалының ішінде дәрежелік қатарды мүшелеп дифференциалдауға болады, онда

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (8)$$

қатары үшін $-R < x < R$ болғанда

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots \qquad (9)$$

теңдігі орынды.

- Жинақтылық интервалының ішінде дәрежелік қатарды мүшелеп интегралдауға болады, сондай-ақ (8) қатары үшін $-R < a < x < R$ болғанда

$$\int_a^x S(t)dt = \int_a^x a_0 dt + \int_a^x a_1 t dt + \int_a^x a_2 t^2 dt + \int_a^x a_3 t^3 dt + \ldots + \int_a^x a_n t^n dt + \ldots \qquad (10)$$

теңдігі орынды.

(9) және (10) қатарларының жинақтылық радиусы берілген дәрежелік қатардың жинақтылық радиусын береді.

Функцияның дәрежелік қатарларға жіктелінуі

$f(x)$ функциясын дәрежелік қатарға жіктеуге, яғни дәрежелік қатардың қосындысы түрінде көрсетуге болады.

x_0 нүктесінің аймағында анықталған және осы аймақта $(n+1)$-ші ретті туындылары бар $f(x)$ функциясы үшін *Тейлор формуласы* орындалады:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \quad (1)$$

мұндағы

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad c\in(x_0,x)$$ - *қалдық мүшесі*

(Лагранж түріндегі),

c санын

$$c = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1$$

түріндегі жазуға болады.

(1) формуласын қысқаша

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \tag{2}$$

түрінде жазуға болады, мұндағы

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Тейлор көпмүшелігі деп аталады.

Егер $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінің аймағында кез келген ретті туындысы бар (яғни шексіз дифференциалданатын) және $n \to \infty$ қалдық мүшесі $R_n \to 0$ ($\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$), онда Тейлор формуласынан *Тейлор қатары* деп аталатын $f(x)$ функциясының $(x - x_0)$ дәрежесі бойынша жіктелуі алынады:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (3)$$

Егер $x_0 = 0$ болса, онда

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (4)$$

Маклорен қатарын аламыз.

Тейлор қатарын x_0 нүктесінің аймағында кез келген шексіз дифференциалданатын функция үшін құруға болады (бұл қажетті белгісі). Бірақ бұдан қатар берілген $f(x)$ функциясына жинақталуы алынбайды, ол қатар жинақсыз немесе жинақты болуы, сондай-ақ $f(x)$ функциясына жинақталмауы да мүмкін.

Мысал 1. $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{егер } x\neq 0, \\ 0, & \text{егер } x=0 \end{cases}$

функциясы $x=0$ нүктесінде кез келген ретті туындысы бар, сондай-ақ кез келген n үшін $f^{(n)}(0)=0$. Онда Маклорен қатары

$$0+\frac{0}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\ldots+\frac{0}{n!}x^n+\ldots$$

жинақты, бірақ оның $S(x)$ қосындысы кез келген x нүктесінде нөлге тең, ал $f(x)$ функциясына тең емес.

Теорема 1. $f(x)$ функциясының (3) Тейлор қатары x нүктесінде $f(x)$ функциясына жинақталуы үшін бұл нүктеде (1) Тейлор функциясының қалдық мүшесі $n \to \infty$ нөлге ұмтылуы қажетті және жеткілікті, яғни $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$.

Ескерту: Егер (3) Тейлор қатары $f(x)$ функциясының туындылауына жинақты болса, онда Тейлор функциясының қалдық мүшесі Тейлор қатарының қалдығына тең, яғни $R_n(x) = r_n(x)$.

($R_n(x) = f(x) - S_n(x)$, мұнда $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ және $S(x)$ - Тейлор қатардың қосындысы).

Келесі теорема функцияның Тейлор қатарына жіктелуінің жеткілікті белгісін береді.

Теорема 2. Егер $f(x)$ функциясының барлық туындыларының модулі x_0 нүктесінің аймағында бір ғана $M > 0$ санымен шектелген болса, онда осы аймақтағы кез келген x үшін $f(x)$ функциясының Тейлор қатары $f(x)$ функциясына жинақталады, яғни (2) жіктелуі орын алады.

Кейбір қарапайым (элементар) функциялардың Тейлор (Маклорен) қатарына жіктелуі

$f(x)$ функциясын (4) Маклорен қатарына жіктеу үшін:

1. $f'(x), f''(x),..., f^{(n)}(x),...$ туындыларын табу керек;
2. $x_0 = 0$ нүктесінде туындының мәнін есептеу керек;
3. Берілген функция үшін (4) қатарын жазу керек және оның жинақтылық интервалын табу керек;
4. $n \to \infty$ Маклорен қатарының қалдық мүшесі $R_n(x) \to 0$ ұмтылатын $(-R; R)$ интервалын табу керек. Егер ол интервал бар болса, онда осы интервалда $f(x)$ функциясы және Маклорен қатары сәйкес келеді.

Ескерту: Дәрежелік қатардың жинақтылық интервалында қалдық қатар $n \to \infty$ нөлге ұмтылады: $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Қарапайым функциялардың Маклорен қатарына жіктелуі:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}x^{n}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^{3}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}x^{n}+\ldots,\quad \begin{cases}[-1;1], & \alpha\geq 0\\ (-1;1], & -1<\alpha<0;\\ (-1;1), & \alpha\leq -1\end{cases}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}=1+x+x^{2}+\ldots+x^{n}+\ldots,\qquad x\in(-1;1);$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n}+\ldots,\qquad x\in(-1;1];$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad x \in [-1;+1];$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot (2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,$$

$$x \in [-1;+1];$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty;+\infty);$$

$$\operatorname{ch} x = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty;+\infty);$$

1-мысал: $y = 5^x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^4 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

Шешімі.

a) Маклорен формуласын пайдаланамыз:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

b) $y=5^x$ функциясының $x_0=0$ нүктесіндегі туындыларын табамыз:

$$y'=(5^x)'=5^x\ln 5, \qquad y'(0)=\ln 5;$$
$$y''=(5^x\ln 5)'=5^x\ln^2 5, \qquad y''(0)=\ln^2 5;$$
$$y'''=(5^x\ln^2 5)'=5^x\ln^3 5, \qquad y'''(0)=\ln^3 5;$$
$$y^{IV}=(5^x\ln^3 5)'=5^x\ln^4 5, \qquad y^{IV}(0)=\ln^4 5.$$

Маклорен қатарын жазамыз:

$$5^x=1+x\ln 5+\frac{x^2\ln^2 5}{2!}+\frac{x^3\ln^3 5}{3!}+\frac{x^4\ln^4 5}{4!}+\ldots$$

x^4 алдындағы коэффициент $\frac{\ln^4 5}{4!}=\frac{\ln^4 5}{24}$ болады.

c) Жауабы: $\frac{\ln^4 5}{24}$.

2-мысал: $y = x\sin 5x$ функциясын Маклорен қатарына жіктелуіндегі x^3 алдындағы коэффициентті анықтаңыз.

Шешімі.

a) Маклорен формуласын пайдаланамыз:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

b) $y=x\sin 5x$ функциясының $x_0=0$ нүктесіндегі туындыларын табамыз:

$$y'=(x\sin 5x)'=\sin 5x+5x\cos 5x,\ \ y'(0)=0;$$

$$y''=(\sin 5x+5x\cos 5x)'=5\cos 5x+5\cos 5x-25x\sin 5x,\ y''(0)=10;$$

$$y'''=(10\cos 5x-25x\sin 5x)'=-50\sin 5x-25\sin 5x-125x\cos 5x,$$

$$y'''(0)=0.$$

Маклорен қатарын жазамыз:

$$x\sin 5x=0+0+\frac{10x^2}{2!}+\frac{0}{3!}x^3+\ldots.$$

x^3 алдындағы коэффициент $\frac{0}{3!}=0$ болады.

c) Жауабы: 0.

Қолданылған әдебиеттер:

1. Жантасов Т.Г. Қатарлар тақырыбынан әдістемелік нұсқаулар. ВКГТУ, 2004. - 186 Б.
2. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. I, II бөлімдер. Алматы 2000 ж.
3. Пискунов И.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Наука, 1985, Т. 2. - 526 С.
4. Письменный Д.Т. Высшая математика. – М.: Айрис-Пресс, 2006. - 256 С.

Қайталау сұрақтары

1. Функциялық қатар дегеніміз не? Оның жалпы түрін жазыңыз.
2. Функциялық қатардың жинақтылық нүктесі және жинақсыздық нүктесі деп нені атайды?
3. Функциялық қатардың жинақтылық облысы дегеніміз не?
4. Функциялық қатардың қосындысы қалай анықталады?
5. Дәрежелік қатар деп қандай қатарды айтады? Оның жалпы түрін жазыңыз.
6. Дәрежелік қатардың коэффициенттері деп нені атайды?
7. $(x-x_0)$ дәрежелері бойынша жазылған дәрежелік қатардың түрі қандай?
8. Абель теоремасын тұжырымдаңыз.
9. Абель теоремасынан шығатын салдарды тұжырымдаңыз.
10. Дәрежелік қатардың жинақтылық интервалы дегеніміз не?



11. Дәрежелік қатардың жинақтылық радиусы дегеніміз не? Ол қалай анықталады?
12. Жинақтылық радиусының мәндеріне байланысты қандай жағдайлар болуы мүмкін?
13. Дәрежелік қатардың жинақтылық радиусын Даламбер белгісі арқылы табу формуласын жазыңыз.
14. Дәрежелік қатардың жинақтылық радиусын Кошидің радикалдық белгісі арқылы табу формуласын жазыңыз.
15. Егер дәрежелік қатар толық емес болса (кейбір дәрежелері қамтылмаса), оның жинақтылық интервалы қалай табылады?
16. Дәрежелік қатардың қосындысы өзінің жинақтылық интервалында қандай қасиетке ие?
17. Екі дәрежелік қатарды қосу, азайту және көбейту амалдарын қолдануға бола ма? Нәтижесінде алынған қатардың жинақтылық радиусы қандай болады?
18. Дәрежелік қатарды мүшелеп дифференциалдауға бола ма? Бұл жағдайда жинақтылық радиусы өзгере ме?
19. Дәрежелік қатарды мүшелеп интегралдауға бола ма? Бұл жағдайда жинақтылық радиусы өзгере ме?
20. Тейлор көпмүшелігі дегеніміз не? Оның формуласын жазыңыз.



20. Тейлор көпмүшелігі дегеніміз не? Оның формуласын жазыңыз.
21. Тейлор формуласын және оның Лагранж түріндегі қалдық мүшесін жазыңыз.
22. Тейлор қатары дегеніміз не? Оның формуласын жазыңыз.
23. Маклорен қатары дегеніміз не? Оның формуласын жазыңыз.
24. Тейлор (Маклорен) қатары әрқашан функцияның өзіне жинақтала ма? Мысал келтіріңіз.
25. Функцияның Тейлор қатарына жіктелуінің анықтамасын беріңіз.
26. Функцияның Тейлор қатары функцияның өзіне жинақталуының қажетті және жеткілікті шарты қандай?
27. Тейлор қатарының қалдығы мен Тейлор формуласының қалдық мүшесінің арасында қандай байланыс бар?
28. Функцияның Тейлор қатарына жіктелуінің жеткілікті шартын тұжырымдаңыз.
29. Функцияны Маклорен қатарына жіктеу алгоритмін сипаттаңыз.
30. e^x функциясының Маклорен қатарына жіктелуін жазыңыз.



31. sinx функциясының Маклорен қатарына жіктелуін жазыңыз.
32. cosx функциясының Маклорен қатарына жіктелуін жазыңыз.
33. $\ln(1+x)$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуін жазыңыз.
34. $(1+x)^m$ биномдық қатарының Маклорен қатарына жіктелуін жазыңыз.
35. $1/(1-x)$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуін жазыңыз.
36. Функциялық қатар мен сандық қатардың айырмашылығы неде?
37. Дәрежелік қатардың жинақтылық интервалының ұштарында қатардың жинақтылығы қалай зерттеледі?
38. Тейлор қатары мен Маклорен қатарының айырмашылығы неде?
39. Функцияның дәрежелік қатарға жіктелуінің практикалық маңызы қандай?
40. Қандай функцияларды Маклорен қатарына жіктеу формулаларын жатқа білу қажет?



Назар аударғаныңызға рақмет!

