Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

ТАҢБАСЫ АЛМА-КЕЗЕК АУЫСПАЛЫ ҚАТАРЛАР. ЛЕЙБНИЦ БЕЛГІСІ

Дәрістік сабақ жоспары:

1. **Таңбасы алма-кезек ауыспалы қатарлар. Лейбниц белгісі;**
2. **Таңбасы ауыспалы қатарлардың жинақтылығының жалпы жеткілікті белгісі;**
3. **Сандық қатарлардың абсолютті және шартты жинақтылығы;**
4. **Абсолютті жинақты қатарлардың негізгі қасиеттері.**

Дәрістік сабақтың мақсаты:

Таңбасы алма-кезек ауыспалы қатарлар, Лейбниц белгісімен танысу.

Мысалдар көмегімен тақырыпты бекіту.

1. Таңбасы алма-кезек ауыспалы қатарлар. Лейбниц белгісі.

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n , \qquad (1)$$

мұндағы $a_n > 0$ барлық $n \in N$, (яғни оң және теріс мүшелері алма-кезек орналасқан).

Таңбасы алма-кезек ауыспалы қатардың жинақтылығының жеткілікті белгісі - *Лейбниц белгісі* (1714 жылы Лейбниц бекіткен).

Теорема 1 (Лейбниц белгісі). (1) таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар жинақты, егер:

1) Қатардың мүшелерінің абсолюттік шамаларының тізбегі монотонды кемімелі

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots > a_n > \ldots$$

болса;

2) Қатардың жалпы мүшесі нөлге ұмтылса

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Сондай-ақ (1) қатарының S қосындысы

$$0 < S < a_1 \qquad (2)$$

шартын қанағаттандырады.

Ескерту:

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots \qquad (3)$$

түріндегі таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар (бірінші мүшесі теріс таңбамен алынған) әрбір мүшесін (-1)-ге көбейту арқылы (1) қатары түріне келтіріліп зерттелінеді.

(1) және (3) түріндегі Лейбниц теоремасының шарттары орындалатын қатарларды *Лейбниц қатарлары* деп аталады.

2. Таңбасы ауыспалы қатарлардың жинақтылығының жалпы жеткілікті белгісі

Таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар таңбасы ауыспалы қатардың дербес жағдайы.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

шексіз оң және теріс таңбалы мүшелерінің жиынынан тұратын сандық қатар *таңбасы ауыспалы қатар* деп аталады.

Мысал 1:

$$-a_1 - a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - a_6 - a_7 + \ldots$$

түрінде берілген қатар.

Теорема 2.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + \ldots, \qquad (4)$$

таңбасы ауыспалы қатар берілсін. Егер берілген (4) қатарының мүшелерінің абсолюттік шамасынан (модулінен) құралған

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + \ldots + |a_n| + \ldots \qquad (5)$$

қатары жинақты болса, онда (4) қатары да жинақты болады.

Ескерту: Керісінше тұжырым орындалмайды, яғни (4) қатары жинақты болса, онда (5) қатары жинақты екендігі орындалмайды.

3. Сандық қатарлардың абсолютті және шартты жинақтылығы

- Таңбасы ауыспалы қатар *абсолютті жинақты* деп аталады, егер оның мүшелерінің абсолюттік шамасынан құралған қатар жинақты болса.
- Таңбасы ауыспалы қатар *шартты жинақты* деп аталады, егер қатардың өзі жинақты, ал оның мүшелерінің абсолюттік шамасынан құралған қатар жинақсыз болса.

Мысал 2: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$

таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар.

Лейбниц белгісінің шарттарын тексерейік:

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots;$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

Лейбниц белгісі бойынша жинақты. Мүшелерінің абсолюттік шамасынан құралған қатар

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармониялық қатар жинақсыз.

Демек, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ қатары шартты жинақты.

Мысал 3: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}+\ldots$

таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар.

Лейбниц белгісінің шарттарын тексерейік:

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{6}>\ldots;$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$

Лейбниц белгісі бойынша жинақты. Мүшелерінің абсолюттік шамасынан құралған

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

қатарын зерттейік.

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!(n+1)}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Бұдан $D=0<1$, демек қатар Даламбер белгісі бойынша жинақты.

Демек, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$ қатары абсолютті жинақты.

4. Абсолютті жинақты қатарлардың негізгі қасиеттері

- Егер қатар абсолютті жинақты және қосындысы S болса, онда осы қатардың мүшелерінің орналасу ретін өзерткеннен алынған қатар да жинақты және оның да қосындысы берілген қатардың S қосындысына тең (Дирихле теоремасы).
- Қосындысы S_1 және S_2 болатын абсолютті жинақты қатарларды мүшелеліп қосуға (азайтуға) болады. Нәтижесінде, қосындысы S_1+S_2 (айырмасы S_1-S_2) болатын абсолютті жинақты қатарды аламыз.

- $a_1 + a_2 + \ldots$ және $b_1 + b_2 + \ldots$ екі қатардың көбейтіндісі

$$(a_1b_1)+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+\ldots+(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_n)+\ldots$$

қосындылары S_1 және S_2 болатын абсолютті жинақты қатарлар көбейтіндісі абсолютті жинақты қатар, қосындысы $S_1 \cdot S_2$.

Сонымен абсолютті жинақты қатарларды қосуға, алуға, көбейтуге болады. Қатардың қосындысы қатардың мүшелерінің жазылу ретінен байланыссыз.

Шартты жинақты қатарлар үшін бұл қасиеттер орындалмайды:

1) Шартты жинақты қатардың мүшелерінің орнын ауыстырғаннан қатардың қосындысы өгереді

Мысал 4: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

шартты жинақты. Оның қосындысы S болсын. Оның мүшелерін бір оң мүшесі екі теріс мүшелерінің орналасуы арқылы орналастырсақ:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\ldots=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\right)}_{S}=\frac{1}{2}S.$$

Енді қатар қосындысы $\frac{1}{2}S$.

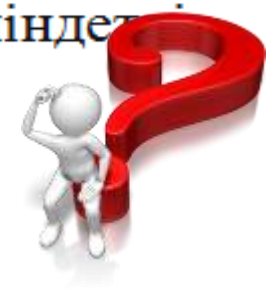
2) Шартты жинақты қатардың мүшелерінің орналасу ретін өзгертіп алдын ала берілген S қосындысы бар жинақты қатарды немесе жинақсыз қатарды алуға болады (Риман теоремасы)

Ескерту: Сондықтан қатарларға олардың абсолютті жинақтылығына көз жеткізбей тұрып амалдар қолдануға болмайды.

Нұсқау: Абсолютті жинақтылықты көрсету үшін оң таңбалы қатарлардың жинақтылық белгілерін қолданамыз.

Қайталау сұрақтары

1. Таңбасы алма-кезек ауыспалы қатар дегеніміз не? Оның жалпы түрін жазыңыз.
2. Лейбниц белгісін тұжырымдаңыз. Таңбасы алма-кезек ауыспалы қатардың жинақты болуы үшін қандай екі шарт орындалуы керек?
3. Лейбниц теоремасының шарттары орындалған жағдайда, қатар қосындысы қандай аралықта жатады?
4. Бірінші мүшесі теріс таңбамен алынған таңбасы алма-кезек ауыспалы қатарды қалай зерттеуге болады?
5. Лейбниц қатары деп қандай қатарларды атайды?
6. Таңбасы ауыспалы қатар дегеніміз не? Ол таңбасы алма-кезек ауыспалы қатардан несімен ерекшеленеді?
7. Таңбасы ауыспалы қатардың жинақтылығының жалпы жеткілікті белгісін тұжырымдаңыз.
8. Егер таңбасы ауыспалы қатар жинақты болса, онда оның мүшелерінің абсолюттік шамасынан құралған қатар міндетті түрде жинақты бола ма?



9. Абсолютті жинақты қатар дегеніміз не? Оның анықтамасын беріңіз.
10. Шартты жинақты қатар дегеніміз не? Оның анықтамасын беріңіз.
11. Қандай жағдайда таңбасы ауыспалы қатар абсолютті жинақты, ал қандай жағдайда шартты жинақты болады?
14. Абсолютті жинақты қатардың мүшелерінің орналасу ретін өзгерткенде оның жинақтылығы мен қосындысы өзгере ме?
15. Екі абсолютті жинақты қатарды мүшелеп қосуға (азайтуға) бола ма? Нәтижесінде қандай қатар алынады?
16. Абсолютті жинақты қатарлардың көбейтіндісі туралы не айтуға болады?
17. Шартты жинақты қатарлар үшін абсолютті жинақты қатарлардың қасиеттері орындала ма?
18. Риман теоремасын тұжырымдаңыз.



9. Абсолютті жинақты қатар дегеніміз не? Оның анықтамасын беріңіз.
10. Шартты жинақты қатар дегеніміз не? Оның анықтамасын беріңіз.
11. Қандай жағдайда таңбасы ауыспалы қатар абсолютті жинақты, ал қандай жағдайда шартты жинақты болады?
14. Абсолютті жинақты қатардың мүшелерінің орналасу ретін өзгерткенде оның жинақтылығы мен қосындысы өзгере ме?
15. Екі абсолютті жинақты қатарды мүшелеп қосуға (азайтуға) бола ма? Нәтижесінде қандай қатар алынады?
16. Абсолютті жинақты қатарлардың көбейтіндісі туралы не айтуға болады?
17. Шартты жинақты қатарлар үшін абсолютті жинақты қатарлардың қасиеттері орындала ма?
18. Риман теоремасын тұжырымдаңыз.



19. Неліктен қатарларға олардың абсолютті жинақтылығына көз жеткізбей тұрып амалдар қолдануға болмайды?
21. Лейбниц белгісі мен таңбасы ауыспалы қатарлардың жалпы жинақтылық белгісінің айырмашылығы неде?
22. Абсолютті жинақты қатар мен шартты жинақты қатардың практикалық маңызы қандай?
23. Берілген таңбасы ауыспалы қатардың абсолютті немесе шартты жинақты екенін қалай анықтайды?
20. Шартты жинақты қатарларға қандай амалдар қолдануға болмайды және неге?



Қолданылған әдебиеттер:

1. Жантасов Т.Г. Қатарлар тақырыбынан әдістемелік нұсқаулар. ВКГТУ, 2004. - 186 Б.

2. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. I, II бөлімдер. Алматы 2000 ж.

3. Пискунов И.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Наука, 1985, Т. 2. - 526 С.

4. Письменный Д.Т. Высшая математика. – М.: Айрис-Пресс, 2006. - 256 С.

Назарларыңызға рахмет!