Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

САНДЫҚ ҚАТАРЛАР

Дәрістік сабақ жоспары:

1. **Сандық қатар, жинақтылығы және қосындысы;**
2. **Геометриялық қатар;**
3. **Сандық қатардың жинақтылығының қажетті шарты;**
4. **Оң қатарлардың жинақтылық белгілері;**
5. **Даламбер белгісі;**
6. **Коши радикалдық белгісі;**
7. **Кошидің интегралдық белгісі.**

Дәрістік сабақтың мақсаты:

Сандық қатар, қатардың жинақтылығы мен қосындысы ұғымдарын енгізу және оң қатарлардың жинақтылық белгілерімен танысу.

Мысалдар көмегімен тақырыпты бекіту.

Тақырыптар бойынша теориялық сұрақтар:

- Сандық қатар;
- Сандық қатардың жинақтылығы;
- Сандық қатардың қосындысы;
- Геометриялық қатар;
- Сандық қатардың жинақтылығының қажетті шарты;
- Гармониялық және жалпы гармониялық қатар;
- Оң қатарлардың жинақтылық белгілері:

- салыстыру белгілері;
- Даламбер белгісі;
- Кошидің радикалдық белгісі;
- Кошидің интегралдық белгісі.

4.1 Сандық қатар, жинақтылығы және қосындысы

Қандайда бір

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

сандар тізбегі берілсін.

«*Тізбек берілді*» дейміз, егер $a_n = f(n), \quad n \in N$ функциясы берілсе.

Егер осы тізбектің мүшелерін «+» белгісімен біріктірсек, онда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

түріндегі өрнегін *сандық қатар* деп атаймыз, мұндағы

- $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *сандары қатардың мүшелері*;
- a_n *қатардың n-ші мүшесі* немесе *жалпы мүшесі* деп аталады.

«*Қатар берілді*» деп тізбек берілген жағдайда айтамыз, яғни a_n берілсе.

Мысал 1. Қатар алғашқы $\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{4} + \frac{16}{5} + \ldots$ мүшелерімен берілген.

Қатардың жалпы мүшесін жазыңыз.

Шешуі: Қатардың мүшелерін олардың нөмірлерімен байланыстырсақ:

$$a_1 = \frac{1^2}{1+1}, \; a_2 = \frac{2^2}{2+1}, \; a_3 = \frac{3^2}{3+1}, \; a_4 = \frac{4^2}{4+1} \Rightarrow a_n = \frac{n^2}{n+1}, n \in N$$

екені шығады. a_n белгілі, яғни қатар берілді.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарының алғашқы «n» мүшелерінің қосындысы оның *n-ші дербес қосындысы* деп аталады, да

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

түрінде белгіленеді. Демек,

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ — дербес қосындылар тізбегі - сан тізбегі.

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ шегін қарастырамыз. Үш жағдай болуы мүмкін:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ - сан;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ - жоқ.

1) жағдайында $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары *жинақты*, ал S саны осы *қатардың қосындысы* деп аталады, яғни бұл жағдайда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

деп аламыз.

2) және 3) жағдайларында $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары *жинақсыз* деп аталады. Жинақсыз қатардың қосындысы болмайды.

Мысал 2.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Бұдан

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$ яғни қатар жинақты және

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

2. $1+1+1+\ldots+1+\ldots$ қатарын зерттейік: $S_n=\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n}=n$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty\Rightarrow$ қатар жинақсыз.

3. $1-1+1-1+1-1+\ldots$ қатарын зерттейік:

$$S_n=\begin{cases}1, & \text{егер } n-\textit{тақ}\\ 0, & \text{егер } n-\textit{жұп}\end{cases}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n \text{ шегі жоқ.}$$

Берілген қатар жинақсыз.

Сандық қатардың қасиеттері:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) = \lambda S.$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_1$ және $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_2$ болса, онда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \pm b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_1 \pm S_2.$$

3) Қатардың санаулы ғана мүшелерін өзгерткеннен оның жинақтылығы өзгермейді.

Анықтама 1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарының алғашқы n мүшесін алып тастағанда пайда болатын

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

қатары, осы (1) қатарының n *-ші қалдығы* деп аталады да R_n деп белгіленеді:

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k .$$

Егер қатар жинақты болса, онда

$$R_n = \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots\right) - \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) =$$

$$= S - S_n .$$

Бұдан

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) \Rightarrow \left| \lim_{n\to\infty} S_n = S \right| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Сонымен:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - жинақты } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - жинақты } \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

4.2 Геометриялық қатар

Геометриялық прогрессия берілсін:

$$a, aq, aq^2, \ldots, aq^{n-1}, \ldots$$

Осы прогрессияның мүшелерінен құрылған

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \quad (a \neq 0) \qquad (2)$$

қатары *геометриялық қатар* деп аталады.

Прогрессияның алғашқы n мүшелерінің қосындысы

$$S_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = a\frac{(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1$$

формуласымен есептелінетіні белгілі.

Осы қосындының шегін табайық:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}.$$

q шамасына қатысты келесі жағдайларды қарастырамыз:

1) Егер $|q|<1$ болса, онда $n\to\infty$ болғанда $q^n\to 0$. Сондықтан

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q},$$

онда $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, яғни (2) қатары жинақты.

2) Егер $|q|>1$ болса, онда $n\to\infty$ болғанда $q^n\to\infty$. Сондықтан

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty,$$

онда (2) қатары жинақсыз.

3) Егер $|q|=1$ болса, онда:

а) $q=1$ болғанда (2) қатары

$$a+a+a+\ldots+a+\ldots$$

түріне келеді. Ол үшін

$$S_n = n\cdot a \text{ және } \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

яғни (2) қатары жинақсыз;

б) $q=-1$ болғанда (2) қатары

$$a-a+a-a+\ldots-$$

түріне келеді. Бұл жағдайда

$$S_n = \begin{cases} 0, & n-жұп \\ a, & n-тақ \end{cases}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n$ шегі жоқ, (2) қатары жинақсыз.

Тұжырым: $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ –

$$\begin{cases} \textit{жинақты} \text{ және } \sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \dfrac{a}{1-q}, \text{ егер } |q|<1 \text{ болса,} \\ \textit{жинақсыз}, \text{ егер } |q| \geq 1 \text{ болса.} \end{cases}$$

Мысал 3. $2^3 + 2^2 + 2 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-3}} + \ldots$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: берілген қатарды

$$2^3 + 2^3 \cdot \frac{1}{2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^2} + \ldots + 2^3 \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots$$

түрінде жазуға болады. Олай болса қатар $a = 2^3$ және $q = \frac{1}{2}$ болатын геометриялық қатарын береді. Бұл қатар үшін

$$|q| = \frac{1}{2} < 1$$

болғандықтан жинақты және $2^3 + 2^2 + 2 + \frac{1}{2} + \ldots = \frac{2^3}{1-\frac{1}{2}} = 2^4.$

4.3 Сандық қатардың жинақтылығының қажетті шарты

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ жинақты болса, онда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

$$a_n = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) = S_n - S_{n-1}$$

Бұдан

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ теңдігінен қатардың жинақтылығы алынбайды.

Мысал 4. Г*армониялық қатарды* жинақтылыққа зеттеңіз.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \qquad (3)$$

Бұл арада $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

Қатарды жинақтылыққа зерттейік, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ шегін қарастырайық:

$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ тізбегінің өспелі және $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=e$ екені белгілі. Онда кез келген $n\in N$ үшін $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$ теңсіздігі орындалады.

e негізінде теңсіздікті логарифмдесек:

$$n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1\Rightarrow\frac{1}{n}>\ln\frac{n+1}{n}\Rightarrow\frac{1}{n}>\ln(n+1)-\ln n. \qquad (4)$$

Қатардың n-ші дербес қосындысын қарастырайық:

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}>|(4)|>(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+(\ln 4-\ln 3)+\ldots$$

$$\ldots+(\ln n-\ln(n-1))+(\ln(n+1)-\ln n)=\ln(n+1)$$

$$S_n>\ln(n+1)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n\geq\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n\geq+\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{ –жинақсыз.}$$

Сонымен $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ болғанымен $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - жинақсыз.

3) Егер $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақсыз болады.

(қатардың жинақсыздығының жеткілікті шарты).

Мысал 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-2}{n+5}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-2}{n+5} = 3 \neq 0$ болғандықтан $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-2}{n+5}$

қатары жинақсыз.

4.4 Оң қатарлардың жинақтылық белгілері

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары *оң таңбалы қатар* (*оң қатар*) деп аталады, егер кез келген n нөмірі үшін $a_n > 0$ болса.

Оң қатардың жинақтылығының *белгілері:*

I Салыстыру белгісі

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ оң қатарлары берілсін.

Егер кез келген $n \in N$ үшін

$$a_n \le b_n \qquad (5)$$

теңсіздігі орынды болса, онда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ - жинақты } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - жинақты,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - жинақсыз} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ - жинақсыз.}$$

Үлгі қатарлар:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, $a \neq 0$ - геометриялық қатар $\begin{cases} |q|<1 \text{ болса } \textit{жинақты}, \\ |q|\geq 1 \text{ болса } \textit{жинақсыз}. \end{cases}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}$ - жалпы гармониялық қатар $\begin{cases} \lambda>1 \text{ болса } \textit{жинақты}, \\ \lambda\leq 1 \text{ болса } \textit{жинақсыз}. \end{cases}$

Мысал 6.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - жинақты қатар: $\lambda = 2 > 1.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - жинақсыз гармониялық қатар: $\lambda = 1.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ - жинақсыз қатар: $\lambda = \frac{1}{2} < 1.$

Мысал 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+2^n}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: берілген қатарды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ жинақты $\left(|q| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1\right)$ геометриялық қатарымен салыстырайық: $\frac{1}{3+2^n} < \frac{1}{2^n}$.

Бұдан берілген қатар *I салыстыру белгісі* бойынша жинақты.

Мысал 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+\cos^2 n}}{n}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Жалпы мүшесі $a_n = \frac{\sqrt{1+\cos^2 n}}{n}$.

Салыстыру мақсатында $b_n = \frac{1}{n}$

жинақсыз гармониялық қатарын қарастырайық:

$$\frac{\sqrt{1+\cos^2 n}}{n} > \frac{1}{n}.$$

Бұдан берілген қатар *I салыстыру белгісі* бойынша жинақсыз.

II Салыстыру белгісі (Шектік салыстыру белгісі).

1) Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=к\neq 0$ және *к*- сан болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ және $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ оң қатарларының екеуі де жинақты немесе екеуі де жинақсыз болады.

2) Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$ болса, онда:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ - жинақты $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ - жинақты,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ - жинақсыз $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ - жинақсыз.

3) Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=+\infty$ болса, онда

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ - жинақты $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ - жинақты,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ - жинақсыз $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ - жинақсыз.

Мысал 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{5n}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Шектік салыстыру белгісін қолданамыз:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{5n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{5} \neq 0$$

II салыстыру белгісі бойынша

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{5n} \quad \text{және} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

қатарларының екеуі де жинақты немесе екеуі де жинақсыз.

Олай болса гармониялық қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ - жинақсыз } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{5n} \text{ - жинақсыз.}$$

Нұсқау: *II салыстыру белгісі* қатардың жалпы мүшесі көпмүшеліктердің қатынасы немесе көпмүшеліктердің түбірлерінің қатынасы түрінде берілсе қолдануға қолайлы.

4.5 Даламбер белгісі

(1717-1783 ж.ж., француз математигі)

Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=D$ болса, онда

- $D<1$ болғанда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ қатары жинақты,
- $D>1$ болғанда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ қатары жинақсыз.

Ескерту: $D=1$ болғанда Даламбер белгісі қатардың жинақтылығы туралы ешқандай қорытынды бермейді.

Нұсқау: Даламбер белгісін қатардың жалпы мүшесінің құрамында a^n немесе $n!$ түріндегі көбейткіштер бар жағдайда қолдану қолайлы болады.

Мысал 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Даламбер белгісін қолданамыз:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$D = 0 < 1.$ Олай болса аталған белгі бойынша қатар жинақты.

Мысал 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Даламбер белгісін қолданамыз:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot n^2}{3^n \cdot (n+1)^2} = 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 = 3$$

$D = 3 > 1$ болғандықтан, аталған белгі бойынша қатар жинақсыз.

4.6 Кошидің радикалдық белгісі

(1789-1857 ж.ж., француз математигі)

Егер $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = K$ болса, онда

- $K < 1$ болғанда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақты,
- $K > 1$ болғанда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақсыз.

Ескерту: $K = 1$ болғанда Кошидің радикалдық белгісі қатардың жинақтылығы туралы ешқандай қорытынды бермейді.

Нұсқау: Бұл белгіні қатардың жалпы мүшесінің *n дәрежелі түбірі* оңай алынатын жағдайларда қолдану тиімді.

Мысал 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Кошидің радикалдық белгісін қолданамыз:

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+1}=\frac{1}{3}<1.$$

Сонымен $K<1$, олай болса қатар жинақты.

Мысал 13. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Кошидің радикалдық белгісін қолданамыз:

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1.$$

Сонымен, $K=e>1$ болса берілген қатар жинақсыз.

4.7 Кошидің интегралдық белгісі

Егер:

- $a_n > 0, \forall n \in N;$
- $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots;$
- $f(\mathrm{x})$ функциясы $[1, +\infty)$ аралығында үзіліссіз және кемімелі;
- $\forall n \in N \quad f(n) = a_n$ болса,

  онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары мен $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ дәйексіз интегралының екеуі де жинақты немесе жинақсыз болады.

Нұсқау: Бұл белгіні қатардың жалпы мүшесі туындылайтын функциядан интеграл табу оңай болған жағдайларда қолдану тиімді.

Ескерту: $x = n \quad (n = 1,2,3,\ldots)$ нүктелерінде f(n)-ге тең f(x) функциясын тұрғызу үшін, f(n) функциясының натурал аргументін, яғни n - ді үздіксіз аргумент x - ке ауыстырамыз. *Мысалы*:

$$f(n) = \frac{1}{n(n+1)} \text{ болса, онда } f(x) = \frac{1}{x(x+1)};$$

$$f(n) = \frac{1}{n^2} \text{ болса, онда } f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Мысал 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Кошидің интегралдық белгісін қолданамыз:

$f(n)=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ болғандықтан, $f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$ болады.

Бұл функция $[1,+\infty)$ аралығында үзіліссіз және кемімелі.

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)} = \lim_{b\to+\infty}\left[\ln\ln(b+1)-\ln\ln 2\right]=\infty$$

Дәйексіз интеграл *жинақсыз*, онда берілген қатар да *жинақсыз*.

Мысал 15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Кошидің интегралдық белгісін қолданамыз:

$$f(n)=\frac{n}{e^{n^2}} \quad \text{болғандықтан,} \quad f(x)=\frac{x}{e^{x^2}} \quad \text{болады.}$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{x}{e^{x^2}}dx = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_1^b e^{-x^2}d\left(-x^2\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{e^{-x^2}}{2}\right)\Bigg|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2e^{b^2}}+\frac{1}{2e}\right) = \frac{1}{2e}$$

Дәйексіз интеграл жинақты, онда берілген қатар да жинақты.

Қайталау сұрақтары

1. Сандық қатар дегеніміз не? Оның жалпы мүшесі деп нені атайды?
2. Қатардың алғашқы мүшелері бойынша оның жалпы мүшесін қалай табуға болады?
3. Қатардың n-ші дербес қосындысы дегеніміз не? Ол қалай белгіленеді?
4. Қатардың жинақтылығы мен жинақсыздығы қалай анықталады? Қандай жағдайлар болуы мүмкін?
5. Жинақты қатардың қосындысы деп нені атайды?
6. Сандық қатарлардың негізгі қасиеттерін атаңыз.



7. Қатардың n-ші қалдығы дегеніміз не? Ол қалай белгіленеді?
8. Егер қатар жинақты болса, оның қалдығының шегі неге тең?
9. Геометриялық қатар деп қандай қатарды айтады? Оның жалпы түрін жазыңыз.
10. Геометриялық қатардың жинақтылық шарты қандай? Жинақты болған жағдайда оның қосындысы неге тең?
11. Егер $|q|\geq 1$ болса, геометриялық қатар неге жинақсыз болады?
12. Қатардың жинақтылығының қажетті шартын тұжырымдаңыз.
13. Қажетті шарттың орындалуы қатардың жинақты екендігін дәлелдей ме?
14. Қажетті шарт орындалмаған жағдайда қандай қорытынды жасауға болады?
15. Гармоникалық қатардың жинақсыздығын қалай дәлелдеуге болады?



16. Оң таңбалы қатар дегеніміз не?
17. Салыстыру белгісін (I) тұжырымдаңыз. Ол қандай теңсіздікке негізделген?
18. Салыстыру белгісін қолдану үшін қандай үлгі қатарлар жиі пайдаланылады?
19. Шектік салыстыру белгісін (II) тұжырымдаңыз. Қандай үш жағдай қарастырылады?
20. Даламбер белгісін тұжырымдаңыз. Ол қандай шекті қарастырады?
21. Даламбер белгісін қолдану қай типтес қатарлар үшін тиімді?
22. Кошидің радикалдық белгісін тұжырымдаңыз. Ол қандай шекті қарастырады
23. Бұл белгіні қолдану қай жағдайда тиімді?



24. Кошидің интегралдық белгісін тұжырымдаңыз. Ол үшін қандай шарттар орындалуы керек?
25. Интегралдық белгі бойынша қатар мен меншіксіз интегралдың жинақтылығы арасында қандай байланыс бар?
26. Қатардың жинақтылығын зерттеу үшін қолданылатын белгілердің қайсысы қай жағдайда тиімді екенін мысалдармен түсіндіріңіз.
27. Даламбер белгісі мен Коши радикалдық белгісінің ұқсастықтары мен айырмашылықтары қандай?
28. Салыстыру белгілерін қолдану үшін неліктен үлгі қатарлар қажет?
29. Жинақтылықтың қажетті шарты жеткілікті шарт бола ала ма? Неге?
30. Геометриялық қатар мен жалпы гармоникалық қатардың жинақтылық шарттарын салыстырыңыз.



Қолданылған әдебиеттер:

1. Жантасов Т.Г. Қатарлар тақырыбынан әдістемелік нұсқаулар. ВКГТУ, 2004. - 186 Б.

2. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. I, II бөлімдер. Алматы 2000 ж.

3. Пискунов И.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Наука, 1985, Т. 2. - 526 С.

4. Письменный Д.Т. Высшая математика. – М.: Айрис-Пресс, 2006. - 256 С.

Назарларыңызға рахмет!