Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

ТҰРАҚТЫ КОЭФФИЦИЕНТТІ БІРТЕКТІ ЖӘНЕ БІРТЕКСІЗ СЫЗЫҚТЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

Дәрістік сабақ жоспары:

1. **Тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу;**
2. **Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу;**
3. **Жоғарғы ретті біртексіз сызықтық дифференциалдық теңдеулер;**
4. **Коэффиценттері тұрақты *n*-ші ретті біртексіз сызықтық дифференциалдық теңдеулер.**

7.1 Тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу

Екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

түрінде жазылады, мұндағы $p(x), q(x)$ - функциялары *теңдеудің коэффициенттері*, ал $f(x)$ - функциясы *теңдеудің оң жағы* немесе *бос мүшесі* деп аталады.

$$p(x) \equiv p, q(x) \equiv q$$

тұрақты болса, онда теңдеу *тұрақты коэффициентті теңдеу* деп аталады.

Тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (7.1)$$

түрінде жазылады, мұндағы p, q - тұрақты сандар.

Егер $f(x) \equiv 0$ болса, онда (7.1) теңдеуі *біртекті* деп, ал $f(x) \not\equiv 0$ жағдайында *біртексіз* деп аталады.

7.2 Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (7.2)$$

мұндағы p, q - тұрақты сандар.

α_1, α_2 - кез келген тұрақтылар болсын (еркін тұрақтылар).

7.1-анықтама: Егер

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0 \qquad (7.3)$$

тепе-теңдігі тек

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

жағдайында ғана орынды болса, онда y_1 және y_2 функциялары *сызықтық тәуелсіз* деп аталады.

Басқа жағдайда, яғни (7.3) тепе-теңдігі орынды болатындай тым болмаса біреуі нөлден өзгеше α_1, α_2 қос саны табылса, онда y_1, y_2 функциялары *сызықтық тәуелді* деп аталады.

Сонымен:

1) y_1, y_2 сызықтық тәуелді $\Leftrightarrow y_1(x) = Cy_2(x)$, яғни

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = C$$ - тұрақты.

2) y_1, y_2 сызықтық тәуелсіз $\Leftrightarrow \frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ - тұрақты емес, яғни

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv u(x)$$ немесе $y_1(x) \equiv u(x)y_2(x)$,

мұндағы $u(x)$ - тұрақты емес функция ($u(x) \neq const$).

7.1-мысал: Берілген функцияларды сызықтық тәуелсіздікке тексеріңіз.

1) $y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x};$

Шешімі: $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x}.$

а) Егер $k_1 - k_2 = 0$, яғни $k_1 = k_2$ болса, онда

$$e^{(k_1 - k_2)x} = e^{(k_1 - k_1)x} = e^0 = 1 \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = 1$$ - тұрақты

$$\overset{1)}{\Rightarrow} y_1, y_2$$ сызықтық тәуелді.

б) Егер $k_1 - k_2 \neq 0$, яғни $k_1 \neq k_2$ болса, онда

$$e^{(k_1 - k_2)x} = u(x) \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = u(x)$$ - тұрақты емес

$$\overset{2)}{\Rightarrow} y_1, y_2$$ сызықтық тәуелсіз.

2) $y_1 = e^{kx}, \quad y_2 = xe^{kx};$

Шешімі: $y_2 = xe^{kx} = x \cdot y_1 = u(x) \cdot y_1,$

мұндағы $u(x) = x$ - тұрақты емес $\overset{2)}{\Rightarrow}$ кез келген k үшін y_1, y_2 сызықтық тәуелсіз.

3) $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x,$

мұндағы α, β - тұрақты сандар және $\beta \neq 0$;

Шешімі:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x} = ctg\beta x = u(x).$$

$u(x)$ функциясы, $\beta \neq 0$ болғандықтан, тұрақты емес

$$\overset{2)}{\Rightarrow} y_1, y_2 \text{ сызықтық тәуелсіз.}$$

Енді (7.2) біртекті теңдеуінің жалпы шешімінің құрылымын қарастырайық.

7.1-теорема. Егер y_1, y_2 функциялары (7.2) біртекті теңдеудің шешімі болса, онда

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (7.4)$$

функциясы кез келген c_1, c_2 сандары үшін де (7.2) теңдеуінің шешімі болады.

7.2-теорема. Егер y_1, y_2 функциялары (7.2) біртекті теңдеуінің қандай да бір екі сызықтық тәуелсіз дербес шешімдері және c_1, c_2 кез келген тұрақтылар болса, онда

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (7.4')$$

функциясы оның жалпы шешімі болады.

(7.2) теңдеуінің

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y'_0$$

шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін

$$y=c_1y_1+c_2y_2$$

шешімдерінен c_1, c_2 тұрақтыларының белгіленген мәндерінде алуға болады

$$k^2+pk+q=0 \qquad (7.5)$$

(7.5) теңдеуі (7.2) біртекті теңдеуінің *сипаттамалық теңдеуі* деп аталады. Сипаттамалық теңдеудің *дискриминанты*

$$D=p^2-4q.$$

1) $D > 0$ болсын.

Онда квадрат теңдеуінің

$$k_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}, \quad k_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}$$

екі түбірі болады: $k_1 \neq k_2$.

$$y_1 = 1 \cdot e^{k_1 x}, \quad y_2 = 1 \cdot e^{k_2 x}$$

екі дербес шешім аламыз. y_1, y_2 сызықтық тәуелсіз (7.1-мысал)

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} \qquad (7.6)$$

7.2-теоремасы бойынша жалпы шешімі.

2) $D=0$ болсын.

Онда (7.5) сипаттамалық теңдеудің

$$k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$$

бірдей екі түбірлері болады.

$y_1 = 1 \cdot e^{k_1 x}$, $y_2 = x \cdot e^{k_1 x}$ екі дербес шешім аламыз.

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x} = (c_1 + c_2 x) e^{k_1 x} \qquad (7.7)$$

жалпы шешімі шығады.

3) $D<0$ болса, сипапаттамалық теңдеуінің нақты түбірі жоқ. Бұл жағдайда түбірлерді комплекс сандар ұғымын енгізбей-ақ беруге болады, сондықтан оқырмандар жаттығу үшін екі жолын да көрсетсек:

a) Онда (7.5) сипаттамалық теңдеудің

$$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$$

түбірлері комплекс сандар, мұндағы

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

нақты сандар.

b) Бұл түбірлерді комплекс сандар ұғымын қолданып есептесек те болады, онда $i^2 = -1$ екенін ескерсек жеткілікті. Дербес шешімдер:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

7.2-теорема бойынша

$$y = e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x\right). \qquad (7.8)$$

жалпы шешімі шығады.

Сонымен, оларды ыңғайлылық үшін қысқаша кесте түрінде қарастырсақ (7.1-кесте):

$y'' + py' + qy = 0$ - біртекті теңдеу,

$k^2 + pk + q = 0$ - сипаттамалық теңдеуі,

$D = p^2 - 4q$ - сипаттамалық теңдеуінің дискриминанты.

7.1-кесте

№	Сипатта малық теңдеудің дискри минанты $D=p^2-4q$	$k^2+pk+q=0$ сипаттамалық теңдеудің түбірлері	$y''+py'+qy=0$ біртекті теңдеудің жалпы шешімі
I	$D>0$	нақты екі түбірлері бар $k_1=\frac{-p-\sqrt{D}}{2}$, $k_2=\frac{-p+\sqrt{D}}{2}$	$y=c_1y_1+c_2y_2=$ $=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}$
II	$D=0$	нақты бірдей екі түбірлері бар $k_1=k_2=-\frac{p}{2}$	$y=c_1e^{k_1x}+c_2xe^{k_1x}$ $=(c_1+c_2x)e^{k_1x}$
III	$D<0$	нақты түбірлері жоқ $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ $\alpha=-\frac{p}{2}$, $\beta=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$	$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x).$

7.2-мысал: $y'' - 2y' - 8y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешімі: Сипаттамалық теңдеуді жазамыз:

$$k^2 - 2k - 8 = 0$$

$$D = p^2 - 4q = (-2)^2 - 4(-8) = 36 > 0$$ - *I жағдай*

k_1, k_2 түбірлерін табамыз:

$$k_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{2-6}{2} = -2,$$

$$k_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{2+6}{2} = 4.$$

Жалпы шешімін жазамыз:

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{4x}.$$

7.3-мысал: $y'' - 6y' + 9y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешімі: Сипаттамалық теңдеуді жазамыз:

$$k^2 - 6k + 9 = 0$$

$$D = p^2 - 4q = (-6)^2 - 4 \cdot 9 = 0$$ - *II жағдай*

нақты бірдей түбірлері бар:

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} = 3.$$

Жалпы шешімін жазамыз:

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{3x}.$$

7.4-мысал: $y'' - 6y' + 13y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешімі: Сипаттамалық теңдеуді жазамыз:

$$k^2 - 6k + 13 = 0$$

$$D = p^2 - 4q = (-6)^2 - 4 \cdot 13 = -16 < 0$$ - *III жағдай*

а) $$\alpha = -\frac{p}{2} = -\frac{-6}{2} = 3, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} = \sqrt{13 - \frac{36}{4}} = 2$$

немесе

б) $$D = -16 = (-1) \cdot 16 = 16i^2 \Rightarrow \sqrt{D} = \pm 4i$$

$$k_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{6 - 4i}{2} = 3 - 2i,$$

$$k_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{6 + 4i}{2} = 3 + 2i.$$

Жалпы шешімін жазамыз:

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x) \Rightarrow y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

7.5-мысал: $y'' - 6y' + 9y = 0$ теңдеуінің $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ шарттарын қанағаттандыратын шешімін табу керек.

Шешімі: Берілген теңдеудің жалпы шешімі (7.3-мысал):

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{3x}$$

Берілген шарттарды қанағаттандыратын дербес шешімді табамыз:

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{3x} \Rightarrow 0 = c_1$$

$$y' = c_2 e^{3x} + 3(c_1 + c_2 x)e^{3x} \Rightarrow 1 = c_2 + 3c_1 \Rightarrow c_2 = 1$$

Сонымен $y = xe^{3x}$ - берілген теңдеудің дербес шешімі.

7.3 Жоғарғы ретті біртексіз сызықтық дифференциалдық теңдеулер

n - ші ретті сызықты біртексіз теңдеу

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x) \qquad (7.9)$$

түрінде беріледі, мұндағы $f(x)\not\equiv 0$, $a_i(x)\,(i=1,\ldots,n)$ функциялары (a,b) аралығында үзіліссіз. Осы теңдеудің жалпы шешімі

$$y=\overline{y}+\tilde{y}$$

формуласымен табылады, мұндағы:

$\overline{y}$ - теңдеуге сәйкес сызықты біртекті теңдеудің жалпы шешімі,

$\tilde{y}$ - біртексіз теңдеудің дербес шешімі.

Берілген теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің $y_1, y_2, \ldots, y_n$ фундаментальді шешімдері берілген болса, біртексіз теңдеудің жалпы шешімін тұрақтыларды вариациялау әдісі (*Лангранж әдісі)* арқылы табуға болады. Біртексіз теңдеудің жалпы шешімін мына түрде іздейміз

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n,$$

мұндағы $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ функциялары келесі теңдеулер жүйесінен анықталады

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

7.4 Коэффициенттері тұрақты *n*-ші ретті біртексіз сызықтық дифференциалдық теңдеулер

n - ші ретті сызықты біртексіз теңдеу

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x) \qquad (7.9)$$

түрінде беріледі, мұндағы $f(x)\not\equiv 0$, $a_i(x)\,(i=1,\ldots,n)$ функциялары (a,b) аралығында үзіліссіз. Осы теңдеудің жалпы шешімі

$$y=\overline{y}+\tilde{y}$$

формуласымен табылады, мұндағы:

$\overline{y}$ - теңдеуге сәйкес сызықты біртекті теңдеудің жалпы шешімі,

$\tilde{y}$ - біртексіз теңдеудің дербес шешімі.

Коэффициенттері тұрақты n-ші ретті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеулер деп

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (7.10)$$

теңдеуін айтады, мұндағы $f(x)$ үзіліссіз функция, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ тұрақты сандар. Осы теңдеудің жалпы шешімін тұрақтыларды вариациялау немесе дербес шешімін таңдап алу әдістерімен табуға болады.

Тұрақтыларды вариациялау әдісі алдыңғы тақырыптарда көрсетілген. Сондықтан осы тақырыпта дербес шешімін таңдап алу (анықталмаған коэффициенттер) әдісі қарастырылады.

Коэффицентері тұрақты біртексіз сызықты теңдеуінің жалпы шешімі $y = \bar{y} + \tilde{y}$ болады, мұндағы $\bar{y}$ осы теңдеуіне сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі, ал $\tilde{y}$ біртексіз теңдеуінің қандай да бір дербес шешімі.

Сызықты біртекті теңдеудің фундаментальді жүйе түріндегі шешімі әрқашан табылатындықтан, сызықты біртексіз теңдеуді интегралдау осы теңдеудің дербес шешімін табуға келтіріледі.

Дербес шешімді таңдап алу әдісі тек төмендегідей жағдайларда ғана қолданылады (7.2-кесте):

7.2-кесте

1) $f(x)=e^{\alpha x}\ P_n(x)$	$k_1 \neq \alpha,\ k_2 \neq \alpha$	$\tilde{y} = e^{\alpha x} S_n(x)$
	$k_1 = \alpha,\ k_2 \neq \alpha$	$\tilde{y} = x \cdot e^{\alpha x} S_n(x)$
	$k_1 = \alpha,\ k_2 = \alpha$	$\tilde{y} = x^2 \cdot e^{\alpha x} S_n(x)$

Дербес жағдайда

$f(x)=P_n(x)$ $\alpha = 0$	$k_1 \neq 0,\ k_2 \neq 0$	$\tilde{y} = S_n(x)$
	$k_1 = 0,\ k_2 \neq 0$	$\tilde{y} = x \cdot S_n(x)$
$f(x) = a_0 e^{\alpha x}$ $P_n(x)=a_0$	$k_1 \neq \alpha,\ k_2 \neq \alpha$	$\tilde{y} = A \cdot e^{\alpha x}$
	$k_1 = \alpha,\ k_2 \neq \alpha$	$\tilde{y} = A \cdot x \cdot e^{\alpha x}$
	$k_1 = \alpha,\ k_2 = \alpha$	$\tilde{y} = A \cdot x^2 \cdot e^{\alpha x}$

мұндағы $P_n(x)$ берілген n - ші ретті көпмүше, k_1, k_2 – сандары сипаттамалық теңдеудің түбірлері, ал $S_n(x)$ коэффициенттері белгісіз n- ші ретті көпмүше.

2) $f(x)=e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x+ +Q_n(x)\sin\beta x)$ немесе $f(x)=P_N(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ немесе $f(x)=Q_N(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$	$k_{1,2}\neq\alpha\pm\beta i$	$\tilde{y}=e^{\alpha x}(S_N(x)\cos\beta x+ +T_N(x)\sin\beta x)$
	$k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	$\tilde{y}=xe^{\alpha x}(S_N(x)\cos\beta x+ +T_N(x)\sin\beta x)$

Дербес жағдайда

$f(x)=a_0\cos\beta x+b_0\sin\beta x$ немесе $f(x)=a_0\cos\beta x$ немесе $f(x)=b_0\sin\beta x$	$k_{1,2}\neq\pm\beta i$	$\tilde{y}=A\cos\beta x+B\sin\beta x$
	$k_{1,2}=\pm\beta i$	$\tilde{y}=x(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$
$f(x)=P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x$ немесе $f(x)=P_N(x)\cos\beta x$ немесе $f(x)=Q_N(x)\sin\beta x$	$k_{1,2}\neq\pm\beta i$	$\tilde{y}=S_N(x)\cos\beta x+T_N(x)\sin\beta x$
	$k_{1,2}=\pm\beta i$	$\tilde{y}=x(S_N(x)\cos\beta x+T_N(x)\sin\beta x)$
$f(x)=e^{\alpha x}(a_0\cos\beta x+ +b_0\sin\beta x)$ немесе $f(x)=a_0e^{\alpha x}\cos\beta x$ немесе $f(x)=b_0e^{\alpha x}\sin\beta x$	$k_{1,2}\neq\alpha\pm\beta i$	$\tilde{y}=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$
	$k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	$\tilde{y}=xe^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$

мұндағы $P_m(x), Q_n(x)$ берілген көпмүшелер, $k_{1,2}$ – сандары сипаттамалық теңдеудің түбірлері, ал $S_N(x), T_N(x)$ коэффициенттері белгісіз N-ші ретті көпмүшелер, ал $N = \max\{n, m\}$.

7.6-мысал: Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $y'' - y' - 2y = 2e^{3x}$.

Шешімі:

а) $y''-y'-2y=0$ біртекті теңдеуінің сипаттамалық теңдеуі $k^2-k-2=0$, мұндағы $p=-1$, $q=-2$.

Оның дискриминанты

$$D=p^2-4q=(-1)^2-4\cdot(-2)=9>0.$$

7.6.1-кестесі бойынша I - жағдай.

Сипаттамалық теңдеудің түбірлері

$$k_1=\frac{-p-\sqrt{D}}{2}=\frac{1-\sqrt{9}}{2}=-1,$$

$$k_2=\frac{-p+\sqrt{D}}{2}=\frac{1+\sqrt{9}}{2}=2.$$

Демек, біртекті теңдеудің жалпы шешімі

$$\bar{y}=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}.$$

b) Біртексіз теңдеудің дербес шешімін

$\tilde{y} = Ae^{3x}$

түрінде іздейміз, себебі теңдеудің оң жағындағы $f(x) = 2e^{3x}$ функциясында $\alpha = 3$ сипаттамалық теңдеудің түбірі емес, яғни $\alpha \neq k_1, \alpha \neq k_2$.

$\tilde{y} = Ae^{3x}$ біртексіз теңдеудің дербес шешімін және оның бірінші, екінші ретті туындыларын

$\tilde{y}' = 3Ae^{3x}$,

$\tilde{y}'' = 9Ae^{3x}$

берілген $y'' - y' - 2y = 2e^{3x}$ теңдеуіне қоямыз:

$9Ae^{3x} - 3Ae^{3x} - 2Ae^{3x} = 2e^{3x}$.

Бұдан $4A = 2, A = \frac{1}{2}$, онда біртексіз теңдеудің дербес шешімі

$\tilde{y} = \frac{1}{2}e^{3x}$.

Біртексіз тұрақты коэффициентті екінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі:

$y = \bar{y} + \tilde{y} = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}$.

Қайталау сұрақтары

1. Екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы түрін жазыңыз. Қандай жағдайда ол тұрақты коэффициентті деп аталады?
2. Тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу қалай жазылады? Қандай жағдайда ол біртекті, ал қандай жағдайда біртексіз деп аталады?
3. Екі функцияның сызықтық тәуелді және сызықтық тәуелсіздігінің анықтамаларын беріңіз. Оларды қалай тексереді?
4. y_1 және y_2 функцияларының сызықтық тәуелсіздігінің қажетті және жеткілікті шарты қандай?



5. Біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеудің шешімдерінің қасиеті туралы 7.1-теореманы тұжырымдаңыз.
6. Біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімінің құрылымы туралы 7.2-теореманы тұжырымдаңыз.
7. Тұрақты коэффициентті біртекті екінші ретті теңдеу үшін сипаттамалық теңдеу қалай құрылады?
8. Сипаттамалық теңдеудің дискриминантына байланысты біртекті теңдеудің жалпы шешімі қандай үш жағдайда қалай жазылады? Әр жағдайға формулаларды жазыңыз.
9. Сипаттамалық теңдеудің түбірлері нақты және әртүрлі болған жағдайда жалпы шешім қандай түрде жазылады? Мысал келтіріңіз.



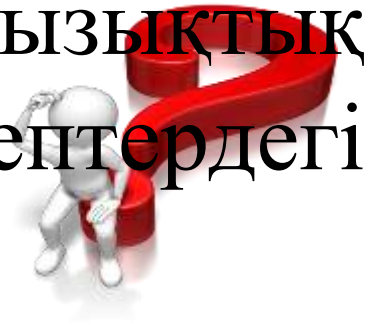
10. Сипаттамалық теңдеудің түбірлері нақты және тең болған жағдайда жалпы шешім қандай түрде жазылады? Мысал келтіріңіз.
11. Сипаттамалық теңдеудің түбірлері комплекс сандар болған жағдайда жалпы шешім қандай түрде жазылады? Мысал келтіріңіз.
12. Біртекті теңдеу үшін Коши есебі қалай шешіледі? Мысалда көрсетілгендей, бастапқы шарттарды пайдаланып тұрақтылар қалай анықталады?
13. n-ші ретті біртексіз сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы түрін жазыңыз.
14. Біртексіз сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімінің құрылымы қандай?
15. Тұрақтыларды вариациялау әдісі (Лагранж әдісі) дегеніміз не? Ол қандай жағдайда қолданылады?



16. Коэффициенттері тұрақты n-ші ретті біртексіз сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы түрін жазыңыз.
17. Анықталмаған коэффициенттер әдісі (дербес шешімді таңдап алу) қандай жағдайларда қолданылады?
18. Егер біртексіз теңдеудің оң жағы $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$ түрінде берілсе, дербес шешім қандай түрде ізделінеді?
19. Егер α саны сипаттамалық теңдеудің түбірі болса, дербес шешімнің түрі қалай өзгереді?
20. Егер біртексіз теңдеудің оң жағы $f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x)$ түрінде берілсе, дербес шешім қандай түрде ізделінеді?



21. Егер $\alpha+i\beta$ саны сипаттамалық теңдеудің түбірі болса, дербес шешімнің түрі қалай өзгереді?
22. Анықталмаған коэффициенттер әдісін қолдану барысында белгісіз коэффициенттер қалай анықталады?
23. Біртекті және біртексіз теңдеулердің шешімдерінің арасындағы байланыс қандай?
24. Сипаттамалық теңдеудің түбірлері мен біртекті теңдеудің фундаментальді шешімдер жүйесі арасында қандай байланыс бар?
25. Тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулердің қолданбалы есептердегі маңызы қандай?



Әдебиеттер тізімі

1. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. I, II бөлімдер. Алматы 2000 ж.
2. Хисамиев Н.Г. Математика. Оқу құралы. 1, 2 бөлім. Өскемен: ШҚМТУ, 2006. - 271 б.
3. Махмеджанов Н. Жоғары математика есептерінің жинағы: оқу құралы. Алматы: Әл-Фараби ат.ҚазУ. - 2005.-341 б.
4. Қабдықайыр Қ. Жоғары математика. Алматы: Қазақ университеті, 2004. 562 б.
5. Айдос Е. Ж. Жоғары математика Т.2., Т.3. Алматы: Бастау , 2008. - 238 б.
6. Жолымбаев О.М. Математика. Алматы: [б. и.], 2004. - 384 б.
7. Сақабеков Ә. Техникадағы математика. Алматы: ҚБТУ, 2008. - 293 б

Назар аударғаныңызға рақмет!

