Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Реті төмендетілетін дифференциалдық теңдеулер

Дәрістік сабақ жоспары:

- Реті төмендетілетін дифференциалдық теңдеулер

Анықтама 1.

$$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

n-ші ретті дифференциалдық теңдеу **немесе**

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

бас туындыға қатысты шешілген дифференциалдық теңдеу **деп аталады.**

Негізгі ұғымдар:

1) $y = \varphi(x)$ шешімі

$$f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$$

n - ші рет дифференциалданатын функция.

2) Коши есебі:

$$y_0 = \varphi(x_0), y_1 = \varphi'(x_0), \ldots, y_{n-1} = \varphi^{(n-1)}(x_0)$$

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін анықтайды.

3) $y = \varphi(x, c_1 c_2 \ldots c_n)$ - n-ші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі, мұндағы $c_1, c_2, \ldots, c_n$ тұрақтыларына мәндер беріп шексіз көп дербес шешімдер алуға болады.

Теорема 1: Егер (2) n –ретті дифференциалдық теңдеудің оң жағы $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ функциясы $M_0(x_0; y_0)$ қамтыған D облысында үздіксіз және сол функцияның аргументі бойынша

$$\frac{\partial^{(\kappa)} f}{\partial y^{(\kappa)}}, \kappa = 0,1,2,\ldots, n-1$$

дербес туындылары бар болса, онда $M_0(x_0; y_0)$ нүктесінің шағын аймағында (1) теңдеуін қанағаттандыратын бір ғана үздіксіз функция табылады.

n-ші ретті дифференциалдық теңдеудің шешімдерін тек кейбір жағдайларда ғана анықтауға болады. Бұл теңдеуді келесі жағдайларда қарастыруға болады:

1) $y^{(n)} = f(x),$ (3)

$y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ – қатыспаған жағдай.

$y = \varphi(x, c_1 c_2 \ldots c_n)$ жалпы шешімі n рет интегралдау арқылы (4) түрінде алынады.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx = f_1(x) + c_1$$

$$y^{(n-2)} = \int (f_1(x) + c_1)dx = f_2(x) + c_1 x + c_2$$

$$y^{(n-3)} = \int (f_2(x) + c_1 x + c_2)dx = f_3(x) + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

.....

$$y = f_n(x) + c_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + c_{n-1} x + c_n \quad (4)$$

Мысалы 1: $y^{IV} = \cos^2 x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Мысалы 1: $y^{IV} = \cos^2 x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешімі: теңдеудің екі бөлігін dx-ке көбейтіп интегралдайық:

$$y''' = \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + c_1,$$

$$y'' = \int \left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + c_1\right)dx = \frac{x^2}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + c_1 x + c_2,$$

$$y' = \int\left(\frac{x^2}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + c_1 x + c_2\right)dx = \frac{x^3}{12} - \frac{\sin 2x}{16} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3,$$

$$y = \int\left(\frac{x^3}{12} - \frac{\sin 2x}{16} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3\right)dx = \frac{x^4}{48} + \frac{\cos 2x}{32} + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4.$$

Жауабы: $y = \frac{x^4}{48} + \frac{\cos 2x}{32} + \frac{c_1 x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4$ изделінді жалпы шешімі.

2) $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, (5)

у-қатыспаған жағдай.

$y^{(k)} = z$ - ауыстыруы арқылы теңдеудің ретін төмендетуге болады.

$y^{(k+1)} = z'$

$y^{(k+2)} = z''$

. . . . . .

$y^{n} = z^{(n-1)}$

Мысалы 2: $y'' = y' + x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешімі: $y' = z,\ \ y'' = z'$ ауыстыруын енгізсек:

$z' - z = x$ теңдеуі бірінші ретті сызықтық теңдеу. $z = uv,\ \ z' = u'v + uv'$ Бернулли алмастыруын енгізейік:

$$u'v + uv' - uv = x$$

$$u'v + u(v' - v) = x$$

$v' - v = 0 \quad (a)$

$v' = v$

$\frac{dv}{dx} = v$

$\frac{dv}{v} = dx$

$\int \frac{dv}{v} = \int dx$

$\ln v = x$

$\underline{v = e^x}$

$u'v = x \qquad (б)$

$\frac{du}{dx} e^x = x$

$du = \frac{x}{e^x} dx$

$\int du = \int x e^{-x} dx$

$$u = \begin{vmatrix} u_1 = x \\ du_1 = dx \\ dv = e^{-x} dx \\ v = -e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c_1$$

$\underline{u = -xe^{-x} - e^{-x} + c_1}$

Демек z=uv және $z = y'$ екенін ескерсек:

$$y' = (-xe^{-x} - e^{-x} + c_1)e^{x} = ((-x-1)e^{-x} + c_1)e^{x} = -x - 1 + c_1 e^{x}$$

у-ті табу үшін екі бөлігін де интегралдау қажет:

$$y = \int (-x - 1 + c_1 e^{x})dx = -\frac{x^2}{2} - x + c_1 e^{x} + c_2$$

3) $F(y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0,$ (6)

x - қатыспаған жағдай

$y'=z$ ауыстыруын енгіземіз, келесі туындылардың табылу реті:

$$y'' = z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz:dy}{dx:dy} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = y'\frac{dz}{dy} = z\frac{dz}{dy}$$

$$y''' = z\left(z\frac{d^2z}{d^2y} + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right),$$ т.с.с. жалғасады.

Мысалы 3: $(y')^2 + 2yy'' = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешімі: $y' = z,\ y'' = zz'$ ауыстыруын берілген теңдікке қойсақ:

$$z^2 + 2yzz' = 0$$

$$2yzz' = -z^2$$

$$2yz\frac{dz}{dy} = -z^2$$

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dy}{2y}$$

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dy}{2y}$$

$$\ln z = -\frac{1}{2}\ln y + \ln c_1$$

$$z = c_1 y^{-\frac{1}{2}} \quad , z = y'$$

$$y' = c_1 y^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = c_1 y^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int y^{\frac{1}{2}} dy = c_1 \int dx$$

$$\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = c_1 (x + c_2)$$

$$y^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} c_1 (x + c_2)$$

$$y = \left(\frac{3}{2} c_1\right)^{\frac{2}{3}} (x + c_2)^{\frac{2}{3}}$$

$y = c_1 (x + c_2)^{\frac{2}{3}}$ - ізделінді жалпы шешім.

Қайталау сұрақтары

1. n-ші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы түрін жазыңыз.
2. Бас туындыға қатысты шешілген n-ші ретті дифференциалдық теңдеу қалай жазылады?
3. n-ші ретті дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебінің тұжырымдамасын жазыңыз.
4. n-ші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі қандай түрде жазылады? Оның құрамында неше тұрақты болады?
5. n-ші ретті дифференциалдық теңдеу шешімінің бар болуы және жалғыздығы туралы теореманы тұжырымдаңыз.
6. Құрамында тек тәуелсіз айнымалы x және n-ші туынды ғана бар теңдеудің жалпы шешімі қалай табылады?
7. $y'''=\sin x$ теңдеуінің жалпы шешімін табу алгоритмін сипаттаңыз.
8. Құрамында ізделінді функция y айнымалысы айқын түрде кездеспейтін теңдеудің ретін қалай төмендетуге болады?



9. $y''=f(x,y')$ түріндегі теңдеуді шешу үшін қандай ауыстыру қолданылады? Осы ауыстырудан кейін теңдеу қандай түрге келеді?

10. Құрамында тәуелсіз айнымалы x айқын түрде кездеспейтін теңдеудің ретін қалай төмендетуге болады?

11. $y''=f(y,y')$ түріндегі теңдеу үшін $y'=z$ ауыстыруынан кейін y'' қалай өрнектеледі?

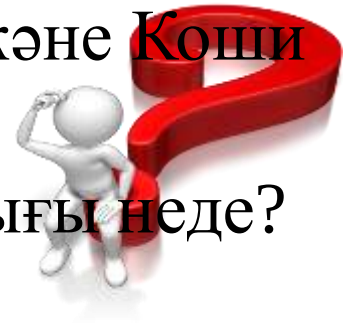
12. Тәуелсіз айнымалысы айқын кездеспейтін екінші ретті теңдеу үшін Коши есебін шешу барысында тұрақтылар қандай ретпен анықталады?

13. Реті төмендетілетін дифференциалдық теңдеулердің үш негізгі типін атап, әрқайсысына тән ауыстыруды көрсетіңіз.

14. Берілген жоғары ретті дифференциалдық теңдеудің ретін төмендету мүмкіндігін қалай анықтайды?

15. n-ші ретті теңдеудің жалпы шешімінде неше тұрақты болады және Коши есебінде неше бастапқы шарт берілуі керек?

16. $y''=f(x)$ және $y''=f(y)$ теңдеулерін шешу әдістерінің айырмашылығы неде?



Әдебиеттер тізімі

1. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. I, II бөлімдер. Алматы 2000 ж.
2. Хисамиев Н.Г. Математика. Оқу құралы. 1, 2 бөлім. Өскемен: ШҚМТУ, 2006. - 271 б.
3. Махмеджанов Н. Жоғары математика есептерінің жинағы: оқу құралы. Алматы: Әл-Фараби ат.ҚазУ. - 2005.-341 б.
4. Қабдықайыр Қ. Жоғары математика. Алматы: Қазақ университеті, 2004. 562 б.
5. Айдос Е. Ж. Жоғары математика Т.2., Т.3. Алматы: Бастау , 2008. - 238 б.
6. Жолымбаев О.М. Математика. Алматы: [б. и.], 2004. - 384 б.
7. Сақабеков Ә. Техникадағы математика. Алматы: ҚБТУ, 2008. - 293 б

Назар аударғаныңызға рақмет!

