Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

СЫЗЫҚТЫҚ БІРІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕР. БЕРНУЛЛИ ТЕНДЕУІ. ТОЛЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫ ТЕНДЕУЛЕР

Дәрістік сабақ жоспары:

1. Бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер
2. Бернулли теңдеуі
3. Толық дифференциалдық теңдеулер
4. Толық дифференциалдық теңдеулерге келтірілетін теңдеулер

5.1 Бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер

5.1-анықтама.

$$y'+P(x)y=Q(x) \qquad (5.1)$$

түріндегі теңдеу y және оның y' туындысына қатысты *біртексіз сызықтық теңдеу* деп аталады. Мұндағы $P(x)$ пен $Q(x)$ функциялары x айнымалысынан тәуелді берілген функциялар. Сонымен

$y'+P(x)y=Q(x)$ - у-ке байланысты сызықтық теңдеу

$x'+P(y)x=Q(y)$ - х-ке байланысты сызықтық теңдеу.

Сызықтық теңдеулерді шешу әдістерін жекелей қарастырайық.

1-әдіс: Бернулли ауыстыруы

$$y = uv$$

$$y' = u'v + uv' \qquad (5.2)$$

көмегімен теңдеуді шешу.

5.1-мысал: $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}$ дифференциалдық теңдеуін Бернулли ауыстыруы көмегімен шешіңіз.

Шешімі: Есептің шарты бойынша

$$P(x)=-\frac{1}{x},\quad Q(x)=-\frac{2}{x^2}$$

(5.2) Бернулли ауыстыруын берілген теңдеуге қойсақ:

$$u'v+uv'-\frac{uv}{x}=-\frac{2}{x^2}.$$

Теңдеуде u көбейткішін екінші және үшінші қосылғышты жақша алдына шығарсақ

$$u'v+u\left(v'-\frac{v}{x}\right)=-\frac{2}{x^2}$$

Екі айнымалары ажыратылатын теңдеулерге келтіреміз:

$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{x} = 0 \quad (a) \\ u'v = -\dfrac{2}{x^2} \quad (б) \end{cases}$$

Алдымен $a)$ айнымалысы ажыратылатын теңдеуін шешіп v шешімін табамыз:

$$a) \Rightarrow v' = \frac{v}{x}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = \ln|x|$$

$$v = x.$$

Табылған $v = x$ шешімін $б)$ теңдеуіне қойып Бернулли ауыстыруындағы u шешімін аламыз:

Табылған $v = x$ шешімін $б)$ теңдеуіне қойып Бернулли ауыстыруындағы u шешімін аламыз:

$$б) \Rightarrow u'x = -\frac{2}{x^2}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{2}{x^3}$$

$$du = -\frac{2}{x^3}dx$$

$$u = -2\int x^{-3}dx = -2\frac{x^{-2}}{-2} + c$$

$$u = x^{-2} + c = \frac{1}{x^2} + c$$

$$u = \frac{1}{x^2} + c.$$

Бернулли ауыстыруы бойынша сызықтық теңдеудің жалпы шешімі $y = uv$ болғандықтан

$$y = \left(\frac{1}{x^2} + c \right) x$$ - жалпы шешімі.

2-әдіс: Еркін тұрақтыны вариациалауды қолдану.

1) $y'+P(x)y=Q(x)$ біртексіз сызықтық теңдеуін $y'+P(x)y=0$ біртекті теңдеу түріне келтіріп, біртекті теңдеудің жалпы шешімін табамыз;
2) біртекті теңдеудің жалпы шешіміндегі c тұрақтысын $c=c(x)$ функциясымен алмастыру (вариациалау) керек;
3) $y=\varphi(c(x),x)$ шешімі мен оның туындысын берілген біртексіз сызықтық теңдеуге қойсақ $c(x)$ табылады, оны біртекті теңдеудің шешіміне қойып біртексіз сызықтық теңдеудің жалпы шешімін табамыз.

5.2-мысал: $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}$ дифференциалдық теңдеуін еркін тұрақтыны вариациалауды қолдану шешіңіз.

Шешімі:

1) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}$

біртексіз сызықтық теңдеуін

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

біртекті теңдеу түріне келтіріп, біртекті теңдеудің жалпы шешімін табамыз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$xdy = ydx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$y = xc$$

2) Біртекті теңдеудің $y = xc$ жалпы шешіміндегі c тұрақтысын $c = c(x)$ функциясымен алмастырсақ және туындысын тапсақ:

$$y = c(x)x$$
$$y' = c'(x)x + c(x).$$

Берілген біртексіз сызықтық теңдеуге y және y' қойылса $c(x)$ табылады:

$$c'(x)x + c(x) - \frac{c(x)x}{x} = -\frac{2}{x^2}$$

$$c'(x)x = -\frac{2}{x^2}$$

$$c'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

$$c(x) = -2\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{2x^{-2}}{-2} + c_1 = x^{-2} + c_1 = \frac{1}{x^2} + c_1$$

$$c(x) = \frac{1}{x^2} + c_1.$$

3) $y = c(x)x$ біртекті теңдеудің шешіміне табылған $c(x)$ қойылып біртексіз сызықтық теңдеудің жалпы шешімін табамыз:

$$y = x\left(\frac{1}{x^2} + c_1\right).$$

Қайталау сұрақтары

1. Біртекті және біртексіз сызықтық теңдеулер дегеніміз не?
2. Сызықтық теңдеулерді шешу әдістері қандай?
3. Бернулли әдісін сипаттаңыз.
4. Еркін тұрақтыны вариациалау дегенімізді қалай түсінесіз?



5.2 Бернулли теңдеуі

5.2-анықтама.

$y'+P(x)y=Q(x)y^n$ немесе $x'+P(y)x=Q(y)y^n$, $n\neq 0$ (5.3)

түріндегі теңдеу *Бернулли теңдеуі* деп аталады. Оның сызықтық теңдеуден айырмашылығы оң жақ бөлігінде у-тің белгілі бір дәрежесі енгізіледі де шешілуі сызықтық теңдеулердегідей жүргізіледі.

$y'+P(x)y=Q(x)y^n$ теңдеуінің екі жағын y^n-не бөліп

$$\frac{y'}{y^n}+\frac{P(x)y}{y^n}=\frac{Q(x)y^n}{y^n},$$

оны теріс дәрежесімен алып жазсақ:

$$y'y^{-n}+P(x)y^{1-n}=Q(x) \qquad (5.4)$$

теңдеуіне келеміз, теңдеуде

$$z=y^{1-n}$$

белгілеуін енгізіп, оның туындысын тапсақ:

$$z'=(1-n)y^{-n}y'.$$

Теңдеуден

$$y^{-n}y'=\frac{z'}{1-n}$$

табылып, $z=y^{1-n}$ белгілеуі екеуін (5.4) теңдеуіне қойсақ:

$$\frac{z'}{1-n}+P(x)z=Q(x).$$

Теңдеудің екі бөлігін де $(1-n)$-ге көбейтейік

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x) \qquad (5.5)$$

түріндегі z және оның z' туындысына қатысты *біртексіз сызықтық теңдеу* алынады. Ал бұл теңдеу жоғарғыда көрсетілгендей Бернулли ауыстыруы немесе Еркін тұрақтыны вариациалауды қолдану арқылы шешіледі.

5.3-мысал: $xy' + y = xy^2$ Бернулли теңдеуін шешіңіз.

Шешімі:

$xy' + y = xy^2$ теңдеуінің екі жағын x -ке бөліп

$$\frac{xy'}{x} + \frac{y}{x} = \frac{xy^2}{x}$$

$$y' + \frac{y}{x} = y^2,$$

мұндағы $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = 1$, $n = 2$ Бернулли теңдеуі екенін біліп, теңдеуінің екі жағын y^2 -не бөлсек

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{y}{xy^2} = \frac{y^2}{y^2},$$

оны теріс дәрежесімен алып жазсақ:

$$y' y^{-2} + \frac{1}{x} y^{-1} = 1 \qquad (5.5)$$

теңдеуіне келеміз, теңдеуде

$$z = y^{-1}$$

белгілеуін енгізіп, оның туындысын тапсақ:

$$z = (-1) y^{-2} y'.$$

Теңдеуден

$$y^{-2}y' = -z$$

табылып, $z = y^{-1}$ белгілеуі екеуін (5.5) теңдеуіне қойсақ:

$$-z' + \frac{1}{x}z = 1.$$

Теңдеудің екі бөлігін де (-1)-ге көбейтейік

$$z' - \frac{z}{x} = -1 \qquad (5.6)$$

түріндегі z және оның z' туындысына қатысты *біртексіз сызықтық теңдеу* алынады.

Бұл теңдеуді жоғарғыда көрсетілгендей Бернулли ауыстыруы көмегімен

$$y = uv$$

$$y' = u'v + uv'$$

Бернулли ауыстыруын берілген теңдеуге қойсақ:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = -1$$

Теңдеуде u көбейткішін екінші және үшінші қосылғышта жақша алдына шығарсақ

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = -1$$

Екі айнымалары ажыратылатын теңдеулерге келтіреміз:

$$\begin{cases} v' - \frac{v}{x} = 0 \quad (а) \\ u'v = -1 \quad (б) \end{cases}$$

Алдымен $a)$ айнымалысы ажыратылатын теңдеуін шешіп v шешімін табамыз:

$$(a) \Rightarrow v' = \frac{v}{x}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{\mathrm{dx}}{x}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = \ln|x|$$

$$v = x.$$

Табылған $v = x$ шешімін $б)$ теңдеуіне қойып Бернулли ауыстыруындағы u шешімін аламыз:

$$(б) \Rightarrow u'v = -1$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}$$

$$du = -\frac{dx}{x}$$

$$\int du = -\int \frac{dx}{x}$$

$$u = -\ln x + c$$

$$u = c - \ln x.$$

Бернулли ауыстыруы бойынша сызықтық теңдеудің жалпы шешімі $z = uv$ болғандықтан

$$z = (c - \ln x)x.$$

Ал Бернулли теңдеуінің жалпы шешімін табу үшін жоғарғыда енгізілген $z = y^{-1}$ белгілеуін қолдану керек. Теңдеудің сол жақтары тең болса, оң жақтарын теңестіре отырып Бернулли теңдеуінің жалпы шешімін табамыз.

$$y^{-1} = (c - \ln x)x$$

$$\frac{1}{y} = (c - \ln x)x$$

$$y = \frac{1}{(c - \ln x)x}$$

Сонымен $y = \frac{1}{x(c - \ln x)}$ - Бернулли теңдеуінің жалпы шешімі.

Қайталау сұрақтары

1. Бернулли теңдеуінің сызықтық теңдеуден айырмашылығы, жазылымы?
2. Жалпы шешімін табу жолын сипаттаңыз.



5.3 Толық дифференциалдық теңдеулер

5.3-анықтама. Егер бірінші ретті

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{5.7}$$

теңдеуінің $P(x,y)$ және $Q(x,y)$ коэффициенті

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{5.8}$$

шартын қанағаттандыратын болса, онда оның сол жақ бөлігі $U(x,y)$ функциясының толық дифференциалы болып табылады. Бұл теңдеу *толық дифференциалдық теңдеу* деп аталады.

Бірінші әдіс: Жалпы шешімі

$$U(x,y) = \mathrm{C} \tag{5.9}$$

және

$$U(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y) \tag{5.10}$$

өрнегімен есептелінеді.

Табылған $U(x,y)$ шешімінен y бойынша дербес туынды ізделіп, ол есептің шартындағы $Q(x,y)$ функциясына теңестіріліп

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) \tag{5.11}$$

$\varphi(y)$ функциясы табылады. Кейіннен $\varphi(y)$ жалпы шешімді табу үшін (5.10) теңдеуіне қойылады.

5.3-мысал: $(e^x+y+Siny\ )dx + (e^y+x+xCosy\ )dy = 0$ толық дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

Шешімі:

$$P(x,y) = e^x + y + Siny$$

$$Q(x,y) = e^y + x + xCosy$$

функцияларды белгілеп, олардың (5.8) шартын қанағаттандыруын тексерелік:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(e^x + y + Siny\right)_y' \Big|_{x=const} = 0 + 1 + \text{Cosy} = 1 + \text{Cosy},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(e^y + x + xCosy\right)_x' \Big|_{y=const} = 0 + 1 + \text{Cosy} = 1 + \text{Cosy},$$

Демек $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, берілген $(e^x + y + Siny\ )dx + (e^y + x + xCosy\ )dy = 0$

теңдеуі толық дифференциалдық теңдеу.

Бірінші әдіс бойынша жалпы шешімі

$$U(x,y)=\mathrm{C} \qquad (5.12)$$

және

$$U(x,y)=\int\left(e^{x}+y+Siny\right)dx+\varphi(y) \qquad (5.13)$$

өрнегімен есептелінеді

$$U(x,y)=e^{x}+yx+xSiny+\varphi(y).$$

Табылған $U(x,y)$ шешімінен y бойынша дербес туынды ізделіп

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\left(e^{x}+yx+xSiny+\varphi(y)\right)_{y}'\Big|_{x=const}=0+x+xCosy+\varphi'(y),$$ ол

есептің шартындағы $Q(x,y)=e^{y}+x+xCosy$ функциясына теңестіріліп

$$\frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y) \qquad (5.14)$$

$$x+xCosy+\varphi'(y)=e^{y}+x+xCosy$$

$$\varphi'(y)=e^{y}.$$

Бұдан

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = e^y$$

$$d\varphi(y) = e^y dy$$

$$\int d\varphi(y) = \int e^y dy$$

$$\varphi(y) = e^y + c_1$$

табылады. Кейіннен $\varphi(y)$ жалпы шешімді табу үшін $U(x,y)$ шешіміне қойсақ

$$U(x,y) = e^x + xy + xSiny + e^y + c_1 .$$

Сондай-ақ

$$U(x,y) = C$$

болғандықтан

$$C = e^x + xy + xSiny + e^y + c_1$$

Жалпы интеграл: $C = e^x + xy + xSiny + e^y$

Екінші әдіс: $U(x,y)=C$ функциясын

$$U(x,y)=\int_{xo}^{x}P(x,y_o)dx+\int_{yo}^{y}Q(x,y)dy \qquad (5.15)$$

$$U(x,y)=\int_{xo}^{x}P(x,y)dx+\int_{yo}^{y}Q(x_o,y)dy \qquad (5.16)$$

өрнектері арқылы есептеуге болады, мұндағы $x_o, y_o - P(x,y)$, $Q(x,y)$ функцияның анықталу облыстарына тиісті сандар.

5.4-мысал: $(e^x+y+Siny\ )dx + (e^y+x+xCosy\ )dy = 0$ толық дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

Шешімі:

$$P(x,y)=e^{x}+y+Siny$$

$$Q(x,y)=e^{y}+x+xCosy$$

функциялары белгілі.

$x_o=0, y_o=1$ сандары $P(x,y)$, $Q(x,y)$ функцияларының анықталу облыстарына тиісті сандар.

(5.15) формуласынан $U(x,y)=C$ екенін ескерсек:

$$U(x,y)=\int_{xo}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{yo}^{y}Q(x,y)dy$$

$$C=\int_{o}^{x}\left(e^{x}+1+Sin1\right)dx+\int_{1}^{y}\left(e^{y}+x+xCosy\right)dy$$

$$C=\left(e^{x}+x+xSin1\right)\Big|_{0}^{x}+\left(e^{y}+xy+xSiny\right)\Big|_{1}^{y}$$

$$C=\left(e^{x}+x+xSin1\right)-\left(e^{o}+o+oSin1\right)+\left(e^{y}+xy+xSin\,y\right)-\left(e^{1}+x+xSin1\right)$$

$$C=e^{x}+x+xSin1-1+e^{y}+xy+xSiny-e-x-xSin1$$

$$C+1+e=e^{x}+e^{y}+xy+xSiny$$

$$C=e^{x}+e^{y}+xy+xSiny$$ - жалпы интегралы.

(5.16) формуласынан $U(x,y)=C$ екенін ескерсек:

$$U(x,y)=\int_{xo}^{x}P(x,y)dx+\int_{yo}^{y}Q(x_o,y)dy$$

$$C=\int_{o}^{x}\left(e^{x}+y+\sin y\right)dx+\int_{1}^{y}e^{y}dy$$

$$C=\left(e^{x}+xy+x\sin y\right)\Big|_{0}^{x}+e^{y}\Big|_{1}^{y}$$

$$C=\left(e^{x}+xy+x\sin y\right)-(1+0+0)+\left(e^{y}-e\right)$$

$$C=e^{x}+xy+x\sin y-1+e^{y}-e$$

$$C+1+e=e^{x}+e^{y}+xy+xSiny$$

$C=e^{x}+e^{y}+xy+xSiny$ - жалпы интегралы.

Қайталау сұрақтары

1. Толық дифференциалдық теңдеу түрін анықтау шарты қандай?
2. Толық дифференциалдық теңдеуді шешу әдістері қандай?



5.4 Толық дифференциалық теңдеулерге келтірілетін теңдеулер

Бірінші ретті толық дифференциалық теңдеулерге келтірілетін теңдеулер. $\frac{\partial p}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ болғанда (5.1) теңдеуін кейбір жағдайда толық дифференциалдық теңдеулерге келтіруге болады.

Ол үшін (5.1) теңдеуін *интегралдаушы көбейткіш* деп аталатын $\mu(x,y)$ функциясына көбейту қажет.

Егер $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ функциясы тек x-тен тәуелді болса, онда интегралдаушы көбейткіш

$$\mu(x,y) = e^{\int \left(\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \right) dx} \qquad (5.17)$$

Егер $\dfrac{-\dfrac{\partial P}{\partial y}+\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{P}$ функциясы тек y-тен тәуелді болса, онда интегралдаушы көбейткіш

$$\mu(x,y)=e^{\int\left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}}{P}\right)dy} \qquad (5.18)$$

түрінде алынады.

5.5-мысал: $ydx - xdy + Ln\, xdx = 0$ дифференциалдық теңдеуін шешіңіз.

Шешімі:

$$(y+Lnx)dx-xdy=0$$

$$P(x,y)=y+Lnx \text{ және } Q(x,y)=-x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=(y+Lnx)_y'\Big|_{x=const}=1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=(-x)'_{y=const}=-1$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{1+1}{-x}=-\frac{2}{x}$$ - тек x-тен тәуелді, демек (5.17)

өрнегімен интегралдаушы көбейткішті табамыз:

$$\mu(x)=e^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx=e^{-2\ln|x|}=e^{\ln x^{-2}}}=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$$

$$\mu(x)=\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^2}(y+\ln x)dx - x\frac{1}{x^2}dy = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{y}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right)}_{P_1}dx - \underbrace{\frac{1}{x}}_{Q_1}dy = 0$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \text{ және } \frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$$

$$U(x,y)=\int P_1(x,y)dx+\varphi(y)=\int\left(\frac{y}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right)dx+\varphi(y)=-\frac{y}{x}+\int\frac{\ln x}{x^2}dx+\varphi(y)=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=\ln x \\ du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=\dfrac{dx}{x^2} \\ v=-\dfrac{1}{x} \end{array}\right|=-\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\ln x+\int\frac{dx}{x^2}+\varphi(y)=-\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(-\frac{y}{x}\ln x-\frac{1}{x}+\varphi(y)\right)'_y\Big|_{x=const}=-\frac{1}{x}+\varphi'(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{x}+\varphi'(y)=Q_1(x,y)$$

$$-\frac{1}{x}+\varphi'(y)=-\frac{1}{x}$$

$$\varphi'(y)=0$$

$$\varphi(y)=c_1$$

$$U(x,y)=-\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+c_1$$

$$C=\frac{y}{x}+\frac{1}{x}\ln x+\frac{1}{x}$$

Сонымен, $y+\ln x+1=Cx$ - жалпы шешімі.

Қайталау сұрақтары

1. Толық дифференциалдық теңдеуге келтіру жолын атаңыз.
2. Интегралдаушы көбейткіш дегеніміз не?



Әдебиеттер тізімі

1. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. I, II бөлімдер. Алматы 2000 ж.
2. Хисамиев Н.Г. Математика. Оқу құралы. 1, 2 бөлім. Өскемен: ШҚМТУ, 2006. - 271 б.
3. Махмеджанов Н. Жоғары математика есептерінің жинағы: оқу құралы. Алматы: Әл-Фараби ат.ҚазУ. - 2005.-341 б.
4. Қабдықайыр Қ. Жоғары математика. Алматы: Қазақ университеті, 2004. 562 б.
5. Айдос Е. Ж. Жоғары математика Т.2., Т.3. Алматы: Бастау , 2008. - 238 б.
6. Жолымбаев О.М. Математика. Алматы: [б. и.], 2004. - 384 б.
7. Сақабеков Ә. Техникадағы математика. Алматы: ҚБТУ, 2008. - 293 б

Назар аударғаныңызға рақмет!

