Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дифференциалдық теңдеулер ұғымы және оған келтірілетін есептер. Коши есебі. Қарапайым дифференциалдық теңдеулер ұғымы. Айнымалылары ажыратылатын, біртекті бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер

Дәрістік сабақ жоспары:

1. Негізгі ұғымдар;
2. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер;
3. Дифференциалдық теңдеуге келтірілетін есептер;
4. Айнымалылары ажыратылған бірінші ретті
5. Біртекті бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер;

1 Негізгі ұғымдар

Анықтама 1: Бір немесе бірнеше айнымалы белгісіз функцияны, айнымалыларды және функцияның туындыларын байланыстыратын теңдеу-*дифференциалдық теңдеу* деп аталады.

Анықтама 2: Егер белгісіз функция тек бір ғана айнымалыдан тәуелді болса, онда теңдеу *қарапайым дифференциалдық теңдеу*, ал егер ол бірнеше айнымалыдан тәуелді болса, онда *дербес туындылы дифференциалдық теңдеу* деп аталады.

Анықтама 3: Теңдеудің құрамындағы ең жоғарғы туындының реті *дифференциалдық теңдеудің реті* деп аталады.

$$F(x,y,y',y''\ldots,y^{(n)})=0 \qquad (1)$$

n-ретті дифференциалдық теңдеу.

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\ y'',y''',\ldots) \qquad (2)$$

бас туындыға қатысты шешілген n-ретті дифференциалдық теңдеу.

Мысал 1: $y''+5xy'-x^2y^2=0$ – екінші ретті,

$\frac{d^3y}{dx^3}-xy^2\frac{dy}{dx}=7$ – үшінші ретті,

$y'+5xy=\cos x$ – бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер.

Анықтама 4: (1) дифференциалдық теңдеуін қанағаттандыратын, яғни оны тепе-теңдікке айналдыратын y=f(x) функциясы *теңдеудің шешімі* деп аталады.

Мысал 2: y=sinx функциясы y″+y=0 теңдеуінің шешімі бола ма?

Шешімі: берілген теңдеуде y=sinx деп аламыз:

$$(\sin x)'' + \sin x = 0 \Leftrightarrow -\sin x + \sin x = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

тепе-теңдігіне келдік, демек y=sinx берілген теңдеудің шешімі болады.

Анықтама 5: Дифференциалдық теңдеудің шешімін табу есебі *интегралдау есебі* деп аталады.

Анықтама 6: x айнымалысынан және c_1, c_2,..., c_n еркін тұрақтыларынан тәуелді

$$y=\varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (3)$$

функциясын (1) теңдеуінің *жалпы шешімі* деп атаймыз, егер ол c_1, c_2,..., c_n еркін тұрақтыларының кез келген белгіленген мәндерінде (1) теңдеуінің шешімі болса.

Анықтама 7: Жалпы шешімнен c_1, c_2,…, c_n тұрақты шамаларына нақты мәндер бергенде шығатын шешімді (1) теңдеуінің *дербес шешімі* деп атаймыз.

Анықтама 8: n-ші ретті (n=1,2,3,…) дифференциалдық теңдеудің

$$y(x_0)=y_0;\quad y'(x_0)=y_0';\quad y''(x_0)=y_0'';\ldots;y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \qquad (4)$$

n бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табу есебі *Коши есебі* деп аталады, мұндағы $y_0, y_0', y_0'',\ldots, y_0^{(n-1)}$ - берілген тұрақты сандар.

2 Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеу:

$$F(x,y,y')=0. \quad (5)$$

Бас туындыға қатысты шешілген бірінші ретті дифференциалдық теңдеу:

$$y'=f(x,y). \quad (6)$$

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеу (x,y) айнымалыларының дифференциалдары арқылы

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \quad (7)$$

түрінде жазылады, мұндағы P(x,y), Q(x,y) белгілі функциялар (мұндай түрге теңдеудегі y′ туындысын $\frac{dy}{dx}$ қатынасына ауыстыру арқылы келуге болады).

Геометриялық мағынасы: (6) теңдігі $y=y(x)$ интегралдық қисығының (x,y) нүктесіне қисықтың осы нүкте арқылы өтетін жанамасының $y'=tg\alpha$ бағытын (бұрыштық коэффициентін) сәйкестікке қояды. (6) теңдігі ОХУ жазықтығында бағыттар өрісін құрайды. Барлық нүктелерінде өріс бағыты бірдей қисық *изоклина* деп аталады. Изоклина интегралдық қисықты жуықтап құруда қолданылады.

Егер $y'=c$ болса, онда изоклина теңдеуі $f(x,y)=c$.

Теорема 1 (Коши есебі шешімінің бар және жалғыз болуы). Егер (6) теңдеуіндегі f(x,y) функциясы және оның $f'_y(x,y)$ дербес туындысы (x_0,y_0) нүктесі тиісті D облысында үзіліссіз болса, онда (6) теңдеуінің

$$y(x_0)=y_0 \text{ немесе } y\big|_{x=x_0}=y_0 \qquad (8)$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын тек бір ғана $y=\varphi(x)$ шешімі бар болады.

Теореманың геометриялық мағынасы: теореманың шарттары орындалса (x_0,y_0) нүктесі арқылы тек бір ғана интегралдық қисық өтеді.

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің түрлері:

- айнымалылары ажыратылатын теңдеу/ айнымалылары ажыратылған теңдеу;
- біртекті теңдеу;
- толық дифференциалдық теңдеу;
- сызықтық теңдеу;
- Бернулли теңдеуі.

3 Айнымалылары ажыратылған бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер

Анықтама 9:

$$P(x)dx+Q(y)dy=0 \qquad (9)$$

түріндегі теңдеуі *айнымалылары ажыратылған теңдеу* деп аталады. (9) теңдеуінің ерекшелігі – оның оң жағындағы әрбір қосылған тек бір ғана айнымалыдан тәуелді: $P(x)dx$ – тек x айнымалысынан, $Q(y)dy$ – тек y айнымалысынан тәуелді.

Мысалы 3: $x^3dx+\frac{1}{y}dy=0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешімі: $x^3dx+\frac{1}{y}dy=0$ - бірінші ретті айнымалылары ажыратылған дифференциалдық теңдеу.

Теңдіктің екі жағын интегралдаймыз:

$$\int x^3dx+\int\frac{1}{y}dy=\int 0$$

$\frac{x^4}{4}+\ln|y|=c$ - жалпы интегралы;

$$\ln|y|=c-\frac{x^4}{4}$$

$$\ln|y|=\ln c-\ln e^{\frac{x^4}{4}}$$

$y=\frac{c}{e^{\frac{x^4}{4}}}$ - жалпы шешімі.

Айнымалылары ажыратылатын теңдеу

$$P_1(x)\cdot Q_1(y)dx+P_2(x)\cdot Q_2(y)dy=0 \qquad (10)$$

түріндегі теңдеу *айнымалылары ажыратылатын бірінші ретті дифференциалдық теңдеу* деп аталады.

Бұл теңдеудің ерекшелігі – dx және dy дифференциалдарының коэффициенттері бір ғана айнымалыдан тәуелді функциялардың көбейтіндісі түрінде жазылған.

(10) теңдеуінің екі жағын да $Q_1(y)\ P_2(x)\neq 0$ көбейтіндісіне бөлу арқылы

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=0 \qquad (11)$$

түріндегі *айнымалылары ажыратылған бірінші ретті дифференциалдық теңдеуіне* келтіріп алып интегралдаймыз.

$$\int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\int\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=C \qquad (12)$$

(10) теңдеуінің жалпы ингералы.

Мысалы 4: $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешімі: $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$ - бірінші ретті айнымалылары ажыратылатын теңдеу.

Көпмүшеге жіктесек $x(y^2+1)dx+y(1-x^2)dy=0$ теңдеу (10) түріне келеді. Мүшелеп $(1-x^2)(y^2+1)$-ге бөлсек (11) түріне келеді:

$$\frac{x}{1-x^2}dx+\frac{y}{y+1^2}dy=0$$

$\int \frac{x}{1-x^2}dx+\int \frac{y}{1+y^2}dy=\int 0$ теңдеу (12) түріне келеді.

Енді мүшелеп интегралдаймыз

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{1-x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{d(1+y^2)}{1+y^2}=\frac{1}{2}\ln C$$

$$-\ln\left|1-x^2\right|+\ln\left|1+y^2\right|=\ln C$$

$$\ln\left|\frac{1+y^2}{1-x^2}\right|=\ln|C|$$

$$1+y^2=C(1-x^2)$$

$$y^2=C(1-x^2)-1$$

Демек, $y=\pm\sqrt{C(1-x^2)-1}$ -жалпы шешімі.

Мысалы 5: $yy' = \frac{1-2x}{y}$ дифференциалдық теңдеуінің жалпы интегралын табыңыз.

Шешімі: $yy' = \frac{1-2x}{y}$ - бірінші ретті айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу.

$y' = \frac{dy}{dx}$ екенін білсек $y\frac{dy}{dx} = \frac{1-2x}{y}$ теңдеуі түрінде жазамыз.

Теңдеудің айнымалыларын ажырату үшін:

$$y^2 dy = (1-2x)dx$$

Мүшелеп интегралдайық:

$$\int y^2 dy = \int (1-2x)dx$$

$$\frac{y^3}{3} = x - x^2 + C$$

$C = \frac{y^3}{3} + x^2 - x$ - жалпы интегралы.

Мысалы 6: $y'\sin x = y\ln y, \quad y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$ Коши есебінің шешімін анықтаңыз.

Шешімі: $y'\sin x = y\ln y$ - бірінші ретті айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу.

а) жалпы шешімін іздейік:

$$Sinx\ \frac{dy}{dx} = y\ln\ y$$

$$Sinxdy = y\ln\ ydx$$

Теңдеудің екі бөлігін де $Sinx \cdot y\ln y \neq 0$ бөлейік:

$$\frac{dy}{y\ln\ y} = \frac{dx}{Sinx}$$

Мүшелеп интегралдайық:

$$\int \frac{d(\ln\ y)}{\ln\ y} = \ln\left|tg\ \frac{x}{2}\right| + \ln\ C$$

$$\ln|\ln\ y| = \ln\left|tg\ \frac{x}{2}\right| + \ln\ C$$

$$\ln\ y = tg\ \frac{x}{2} \cdot C$$

$y = e^{c \cdot tg\frac{x}{2}}$ - жалпы шешімі.

ә) С тұрақтысын анықтайық. Ол үшін берілген бастапқы

$y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$ шартын қолданамыз. Шарттың берілгендерін табылған жалпы шешімге қоямыз. Сонда

$$e = e^{c \cdot tg\frac{\pi}{4}}$$

$$e = e^{c}$$

$c = 1$ -тұрақтының мәні.

б) ізделінді $c=1$ тұрақтысын жалпы шешімдегі орнына енгізе отырып

$y = e^{tg\frac{x}{2}}$ -дербес шешімге ие боламыз.

4 Біртекті бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер

Анықтама 10: Егер $y'=f(x,y)$ бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (13)$$

түріне келтіруге болса, онда ол *бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеу* деп аталады. Біртекті теңдеуді

$$u = \frac{y}{x}, \text{ яғни } y=ux \Rightarrow y'= u'x+u \qquad (14)$$

ауыстыруын енгізу арқылы айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуге келтіріп шешіледі.

Мысалы 7: Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз: $xdy=(x+y)dx$.

$u = \frac{y}{x}$, $y' = u'x + u$ ауыстыруын $y' = 1 + \frac{y}{x}$ теңдігіне қойсақ:

$u'x+u=1+u$

$u'x=1 \ / : x$

$$u' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int du = \int \frac{dx}{x}$$

$$u = \ln|x| + \ln c$$

$$\ln e^u = \ln|cx|$$

$$e^u = cx$$

$$x = \frac{e^u}{c}$$

$$x = \frac{e^{\frac{y}{x}}}{c}$$ - жалпы шешімі.

Мысалы 8: Коши есебін шешіңіз:

$$\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0,\quad y\big|_{x=3}=4$$

Шешімі: а) Жалпы шешімін ізделік:

$$\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx = xdy \;/:xdx$$

$$\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = y'$$ - бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеу.

$u = \frac{y}{x}$, яғни $y=ux \Rightarrow y'= u'x+u$ ауыстыруын соңғы теңдікке қоялық

$$u + \sqrt{1+u^2} = u'x + u$$

$$\sqrt{1+u^2} = u'x$$

$$\sqrt{1+u^2} = x \cdot \frac{du}{dx} \Big| \cdot \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1+u^2}}$$

$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$ мұнда интегралдар кестесінен білу қажеттігін ескертеміз

$$\left| \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c \right|$$

$$\ln |x| = \ln \left| u + \sqrt{1+u^2} \right| + \ln |c|$$

$$x = \left(u + \sqrt{1+u^2} \right) c$$

$$x = \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x} c$$

$\frac{x^2}{c} = y + \sqrt{x^2+y^2}$ - жалпы шешімі.

ә) x=3, y=4 екенін біле отырып с-тұрақтысын есептелік

$$\frac{9}{c} = 4 + \sqrt{9+16} \Rightarrow \frac{9}{c} = 9 \Rightarrow c = 1$$

б) Анықталған с тұрақтысын жалпы шешімге қойсақ:

$x^2 = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ - дербес шешімі.

Мысалы 9: Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

$$y' = \frac{x + 6y}{x}.$$

Әдебиеттер тізімі

1. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. I, II бөлімдер. Алматы 2000 ж.
2. Хисамиев Н.Г. Математика. Оқу құралы. 1, 2 бөлім. Өскемен: ШҚМТУ, 2006. - 271 б.
3. Махмеджанов Н. Жоғары математика есептерінің жинағы: оқу құралы. Алматы: Әл-Фараби ат.ҚазУ. - 2005.-341 б.
4. Қабдықайыр Қ. Жоғары математика. Алматы: Қазақ университеті, 2004. 562 б.
5. Айдос Е. Ж. Жоғары математика Т.2., Т.3. Алматы: Бастау , 2008. - 238 б.
6. Жолымбаев О.М. Математика. Алматы: [б. и.], 2004. - 384 б.
7. Сақабеков Ә. Техникадағы математика. Алматы: ҚБТУ, 2008. - 293 б

Назар аударғаныңызға рақмет!

