Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

ЕКІ ЕСЕЛІ ИНТЕГРАЛДАР

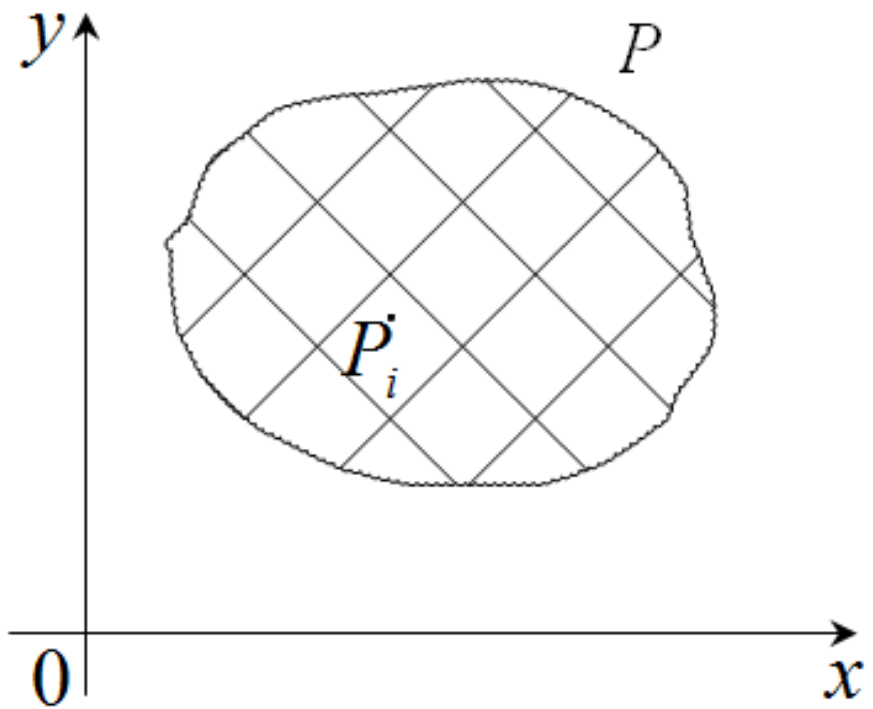
Дәрістік сабақ жоспары:

1. Екі еселі интеграл ұғымы
2. Екі еселі интегралдардың бар болу шарттары
3. Екі еселі интегралдардың қасиеттері
4. Екі еселі интегралдардың есептелінуі (қайталанатын интегралдар)
5. Екі еселі интегралдардың қолданбалары
6. Екі еселі интегралда айнымалыны алмастыру (Полярлық координаттар)
7. Қисық сызықты координатадағы екі еселі интеграл

3.1 Екі еселі интеграл ұғымы

Бұл тақырып екі айнымалылардан тәуелді болған жағдайдағы анықталған интегралдарды жалпылайды.

(P) жазық облысында $f(x,y)$ функциясы анықталсын. (P) облысын ерікті түрде қарапайым шектеулі $(P_1),(P_2),..,(P_n)$ аудандары $\Delta P_1, \Delta P_2, .., \Delta P_n$ болатын торларға бөліктеп, әрбір облыстан кез келген $f(\xi_i, \eta_i)$ нүктесін және сәйкесінше $f(\xi_i, \eta_i)$ мәнін есептеп, $f(\xi_i, \eta_i)\Delta P_i$ көбейтіндісін тауып, барлық i бойынша қосындысын тапсақ (3.1-сурет):



3.1-сурет

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta P_i \qquad (3.1)$$

Бұл $f(x,y)$ функциясының (P) жазықтығындағы *интегралдық қосындысы*. λ – (P_i) облысының ең үлкен диаметрі болсын.

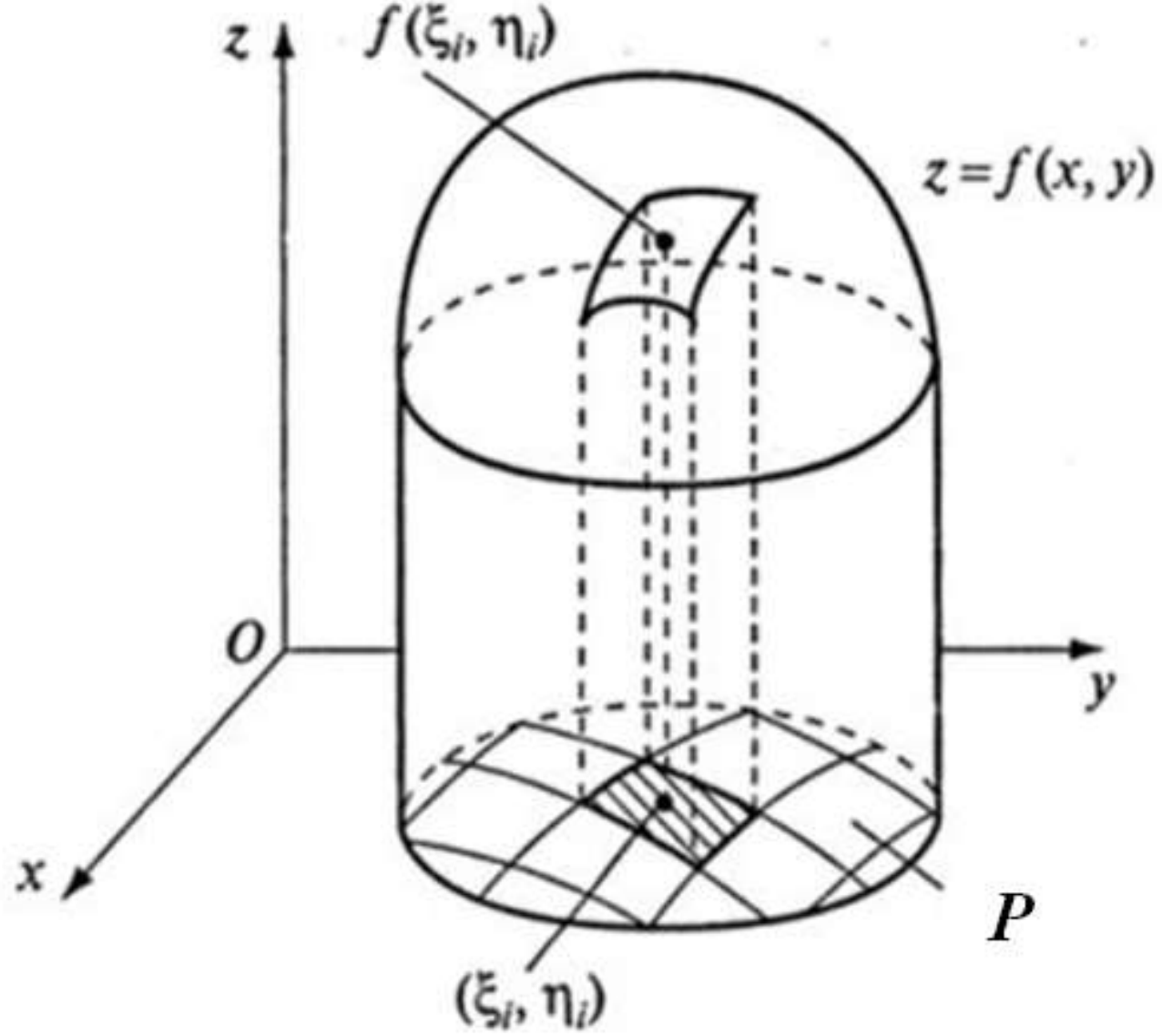
Анықтама 3.1. Егер (3.1) интегралдық қосындысының (P) облысының бөліктену жолдарынан, сондай-ақ (ξ_i, η_i) нүктесінің таңдап алынуына тәуелсіз $\lambda \to 0$ ақырлы шегі табылса, онда ол *екі еселі интеграл* деп аталынып, былай белгіленеді:

$$J = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \iint_P f(x, y) dx dy \qquad (3.2)$$

$f(x,y)$ функциясы P облысындағы интеграл астындағы функция.

Екі еселі интегралдың геометриялық мағынасы:

$V = \iint\limits_{(P)} f(x,y)dP$ – жоғарғыдан $z = f(x,y)$ бетімен, бүйірден Oz өсіне параллель түзулермен шектелген, табаны (P) болатын цилиндрлік дененің көлемін береді.



Қайталау сұрақтары

1. Екі айнымалы функция үшін екі еселі интегралдың анықтамасын тұжырымдаңыз.
2. Екі еселі интегралдың геометриялық мағынасын түсіндіріңіз.



3.2 Екі еселі интегралдардың бар болу шарттары

Теорема 3.1. (қажетті шарты). Егер $f(x,y)$ функциясы шектелген, тұйық облыста интегралданатын болса, онда ол осы облыста шектелген.

Теорема 3.2. (жеткілікті шарты). Егер $f(x,y)$ функциясы шектелген, тұйық облыста үзіліссіз болса, онда ол осы облыста интегралданады.

Қайталау сұрақтары

1. Екі еселі интегралдың бар болуының қажетті шарты қандай?
2. Екі еселі интегралдың бар болуының жеткілікті шарты қандай?



3.3 Екі еселі интегралдардың қасиеттері

1) Еселі интегралдың мәні интегралдағы айнымалылардың белгіленуінен тәуелді болмайды:

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(P)} f(U,V)dUdV;$$

2) Тұрақты көбейткішті интегралдың алдына шығаруға болады:

$$\iint\limits_{(P)} \kappa f(x,y)dxdy = k\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy,\ k - \text{const};$$

3) Функциялардың алгебралық қосындысының еселі интегралы еселі интегралдың алгебралық қосындысына тең:

$$\iint\limits_{(P)} \sum_{i=1}^{n} f_i(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{(P)} f_i(x,y)dxdy,$$

4) Егер $(P)=(P_1)+(P_2)$ болса, онда

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(P_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(P_2)} f(x,y)dxdy;$$

5) Егер (P) облысында $f_1(x,y) \le f_2(x,y)$ болса, онда

$$\iint\limits_{(P)} f_1(x,y)dxdy \le \iint\limits_{(P)} f_2(x,y)dxdy;$$

6) Егер (P) облысында: $f(x,y) \ge 0$ болса, онда $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy \ge 0;$

7) Егер $f(x,y)$ функциясы (P) облысында интегралданатын болса, онда $\left|\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_{(P)} |f(x,y)|dxdy$;

8) Егер (P) облысында $f(x,y)\equiv 1$ болса, онда $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = S(P)$, мұндағы $S-(P)$-ның ауданы;

9) Орта туралы теорема. Егер $f(x,y)$ функциясы ауданын σ болатын (P) шектелген, тұйық облысында үзіліссіз болса, онда осы облыста тек бір ғана $Q(\xi,\eta)$ нүктесі табылып, ол төмендегідей болады:

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP = f(\xi,\eta)\sigma,$$

мұндағы $f(\xi,\eta)=\frac{1}{\sigma}\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP$ – $f(x,y)$ функциясының (P) облысындағы орта мәні.

Теореманың геометриялық мағынасы: егер (P) облысында $f(x,y)\geq 0$ болса, онда бұл функцияның екі еселі интегралы табаны (P), биіктігі $f(x,y)$ болатын түзу цилиндрдің көлеміне тең.

Қайталау сұрақтары

1. Екі еселі интегралдың интегралдау айнымалыларының аттарына тәуелсіздік қасиетін жазыңыз.
2. Екі еселі интегралдың сызықтық қасиеттерін (тұрақты көбейткішті шығару және қосындыны интегралдау) тұжырымдаңыз.
3. Екі еселі интегралдың ауданды қосуға қатысты қасиетін жазыңыз.
4. Екі еселі интегралдардың салыстыру қасиетін қалай тұжырымдайды?
5. Интегралдың модулі мен функция модулінің интегралы арасындағы байланысты көрсететін теңсіздікті жазыңыз.
6. Егер интеграл астындағы функция $f(x,y)=1$ болса, онда екі еселі интеграл қандай шаманы береді?
7. Орта шама туралы теореманы тұжырымдап, оның геометриялық мағынасын түсіндіріңіз.



3.4. Екі еселі интегралдардың есептелінуі

Теорема 3.3. Егер $f(x,y)$ функциясы (D) тұйық облысында үзіліссіз және $x=a$, $x=b$ $(a\le b)$ мен $y=\psi(x)$, $y=\varphi(x)$ ($\psi(x)$ мен $\varphi(x)$ – (D) облысының $[a,b]$-да үзіліссіз функциялар, мұндағы $\varphi(x)\le\psi(x)$) сызықтарымен шектелген болса, онда

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx$$ – қайталанатын интеграл.

Теорема 3.4. Егер $f(x,y)$ функциясы (D) облысында үзіліссіз және $y=c$, $y=d$ $(c\le d)$ мен $x=\psi(y)$, $x=\varphi(y)$, мұндағы $\psi(y)$, $\varphi(y)$ $[c,d]$ -да үзіліссіз функциялар, сондай-ақ $\varphi(y)\le\psi(y)$ болса, онда

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dx$$ – қайталанатын интеграл.

3.1-мысал: $\iint\limits_D \left(x^2 + x\sqrt{y}\right)dxdy, \quad D: x=-1, x=1, y=0, y=4$ интегралын есептеу керек.

Шешімі: Интегралдау облысы ретінде жақтары координаталық өстеріне параллель болатын тік төртбұрыш болады, сондықтан қайталама интегралдағы интегралдау шектері тұрақты болады, яғни

$$-1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 4$$

болады, олай болса

$$\iint\limits_D \left(x^2 + x\sqrt{y}\right)dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{4} \left(x^2 + xy^{1/2}\right)dy = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 y + \frac{2xy^{3/2}}{3} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=4} dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(4x^2 + \frac{16x}{3} \right)dx = \left(\frac{4x^3}{3} + \frac{8x^2}{3} \right)\Bigg|_{-1}^{1} = \left(\frac{4}{3} + \frac{8}{3} \right) - \left(-\frac{4}{3} + \frac{8}{3} \right) = \frac{8}{3}.$$

3.2-мысал: $\iint\limits_D 9y\,dxdy, \quad D: 0 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le 2$ интегралының

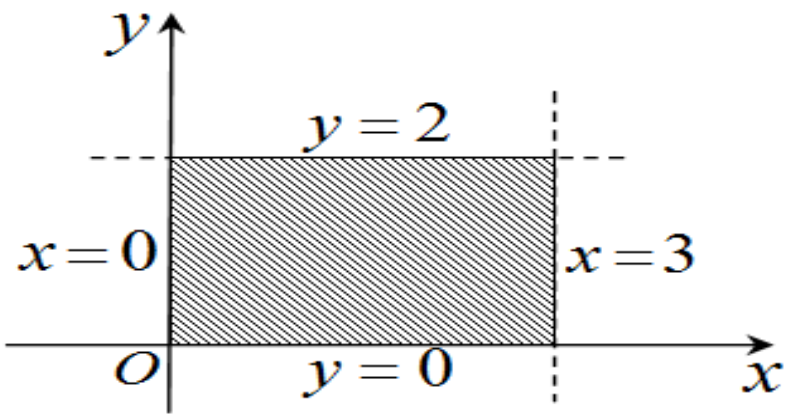
есептеңіз.

Шешімі:

a) Егер $f(x,y)$ функциясы $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ тіктөртбұрышында үзіліссіз функция болса, онда

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy$$ – қайталанатын интеграл.

b) Интегралдау облысы ретінде жақтары координаталық өстеріне параллель болатын



тік төртбұрыш болғандықтан қайталанатын интегралдағы интегралдау шектері тұрақты болады $0\le x\le 3,\ 0\le y\le 2$, яғни интегралдау облысы $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 2\}$, олай болса

$$\iint\limits_D 9y\,dx\,dy=9\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^2 ydy=9\int\limits_0^3 dx\frac{y^2}{2}\Bigg|_{y=0}^{y=2}=9\cdot 2\int\limits_0^3 dx=18x\Big|_0^3=18\cdot 3=54.$$

c) Жауабы: 54.

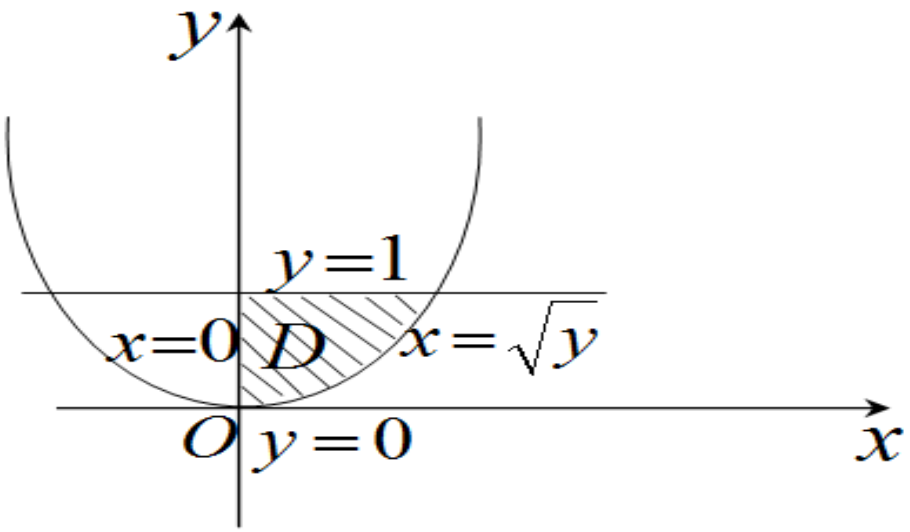
3.3-мысал: $\int_0^1 15\,dy \int_0^{\sqrt{y}} x^3\,dx$ интегралының мәнін есептеңіз.

Шешімі:

a) Егер $f(x,y)$ функциясы $D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\quad y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$ жазық облысында үзіліссіз, ал $y=y_1(x),\ y=y_2(x)$ функциялары D облысының $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз функциялар болса, онда

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$ – қайталанатын интеграл.

b) Интегралдау облысы қисық сызықты D облысы болғандықтан қайталанатын интегралдағы интегралдау шектері $0\le x\le\sqrt{y},\ \ 0\le y\le 1$ теңсіздіктермен анықталатын болады, яғни интегралдау облысы $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\sqrt{y},\quad 0\le y\le 1\}$, олай болса



$$\int_0^1 15dy\int_0^{\sqrt{y}} x^3dx=15\int_0^1 dy\frac{x^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{y}}=\frac{15}{4}\int_0^1 y^2dy=\frac{15}{4}\frac{y^3}{3}\Big|_0^1=\frac{5}{4}.$$

c) Жауабы: $\frac{5}{4}$.

Қайталау сұрақтары

1. x айнымалысы бойынша сызықтық шектермен шектелген облыс үшін екі еселі интегралды қайталанатын интеграл түрінде жазу формуласын көрсетіңіз.

2. y айнымалысы бойынша сызықтық шектермен шектелген облыс үшін екі еселі интегралды қайталанатын интеграл түрінде жазу формуласын көрсетіңіз.

3. Интегралдау облысы тік төртбұрыш болған жағдайда, қайталанатын интегралдағы шектер қандай болады?



3.5 Екі еселі интегралдардың қолданбалары

1. *Жазық денелердің ауданын* есептеу: $S = \iint\limits_{(P)} dxdy;$

2. *Дененің көлемін* есептеу (цилиндрлік денелердің):

$$V = \iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy,\ f > 0,$$

$$V = \iint\limits_{(P)} |f(x,y)|dxdy,\ f < 0;$$

Егер f – таңбасы ауыспалы болса, онда оны бөліктерге бөлеміз.

3. *Беттің ауданы:*

Егер (P) облысында $f(x,y)$ функциясы x және y бойынша үзіліссіз дербес туындылары болса, онда $z=f(x,y)$ бетінің xOy – ке (P) проекциясымен алынған ауданы:

$$\sigma = \iint\limits_{(P)} \sqrt{1 + [f'_x]^2 + [f'_y]^2}\, dxdy;$$

4. Жазық денелердің салмағын (масса), статистикалық сәтін (момент), инерция сәтін, ауырлық центрінің координатын табу.

4_1) *Жазық денелердің салмағын*: $m = \iint\limits_{(P)} \mu(x,y)dxdy$, мұндағы $\mu=\mu(x,y)$ – тығыздық функциясы;

4_2) *Өстерге қатысты статистикалық сәт*:

$$S_x = \iint\limits_{(P)} y\mu(x,y)dxdy, \qquad S_y = \iint\limits_{(P)} x\mu(x,y)dxdy;$$

4_3) *Өстерге қатысты инерциялық сәт:*

$$J_x = \iint\limits_{(P)} y^2\mu(x,y)dxdy, \qquad J_y = \iint\limits_{(P)} x^2\mu(x,y)dxdy;$$

4_4) $C(x_0,y_0)$ – *ауырлық центрі:* $x_0 = \dfrac{S_x}{m}, \quad y_0 = \dfrac{S_y}{m}$.

Егер дене біртекті болса, онда $\mu\equiv 1$.

Қайталау сұрақтары

1. Жазық облыстың ауданын екі еселі интеграл арқылы қалай есептейді?
2. Цилиндрлік дененің көлемін екі еселі интеграл арқылы есептеу формулаларын жазыңыз ($f>0$ және $f<0$ жағдайлары үшін).
3. $z = f(x,y)$ бетінің бір бөлігінің ауданын есептеу формуласын жазыңыз.
4. Айнымалы тығыздықпен берілген жазық дененің массасын табу формуласын жазыңыз.
5. Координата өстеріне қатысты статикалық моменттерді анықтаңыз және оларды есептеу формулаларын көрсетіңіз.
6. Координата өстеріне қатысты инерция моменттерін анықтаңыз және оларды есептеу формулаларын көрсетіңіз.
7. Жазық дененің ауырлық центрінің координаталарын масса мен статикалық моменттер арқылы қалай табады?



3.6 Екі еселі интегралда айнымалыны алмастыру

x, y тікбұрышты координаталардан ρ, θ полярлық координаталарға көшу

$$x = \rho \cos \theta,$$

$$y = \rho \sin \theta$$

қатынасымен байланысты.

Екі еселі интегралда x, y координаталарынан ρ, θ полярлық координаталарына көшу:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta.$$

Егер D облысы $\theta = \alpha, \theta = \beta\ (\alpha < \beta)$ полюстен шығатын екі сәуле және $\rho = \rho_1(\theta), \rho = \rho_2(\theta)$ қисықтарымен шектелсе, онда екі еселі интеграл

$$\iint\limits_D F(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta = \int\limits_\alpha^\beta d\theta \int\limits_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho,\theta)\rho d\rho,$$

мұндағы $F(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

Қайталау сұрақтары

1. Тікбұрышты координаттардан полярлық координаттарға өту формулаларын жазыңыз.
2. Екі еселі интегралда тікбұрышты координаттардан полярлық координаттарға өткенде интеграл өрнегі қалай өзгереді? (dxdy орнына не жазылады?).
3. Егер интегралдау облысы полярлық координаттар жүйесінде полюстен шығатын екі сәуле және қисықтарымен шектелсе, , онда екі еселі интегралды қалай қайталанатын интеграл түрінде жазады?



3.7 Қисық сызықты координатадағы екі еселі интеграл

x, y тікбұрышты координаталардан ρ, θ полярлық координаталарға көшу

$$x = \rho \cos \theta,$$

$$y = \rho \sin \theta$$

қатынасымен байланысты.

Екі еселі интегралда x, y координаталарынан ρ, θ полярлық координаталарына көшу:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta.$$

Егер D облысы $\theta = \alpha, \theta = \beta\ (\alpha < \beta)$ полюстен шығатын екі сәуле және $\rho = \rho_1(\theta), \rho = \rho_2(\theta)$ қисықтарымен шектелсе, онда екі еселі интеграл

$$\iint\limits_D F(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta = \int\limits_\alpha^\beta d\theta \int\limits_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho,\theta)\rho d\rho,$$

мұндағы $F(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

Полярлық координаталар жүйесінде анықтауыш:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

Мысал 3.4: Есептеңіз: $\int_L (8x - y)dx, \quad L: y = x, \; O(1;1), \; A(3;3).$

Шешімі:

a) Екінші текті қисық сызықты интегралды есептеуде интеграл астындағы өрнекті толықтай не «х-тен», не «у-тен» байланыстыра отырып, анықталған интегралды есептеуге келтіреміз.
Ескерту: Интегралдау бағытын дұрыс таңдау қажет.

b) Интеграл астындағы өрнекті толықтай тек «х-тен» тәуелді деп қарастырсақ, онда интегралдау бағыты 1-ден 3-ке дейін болмақ, себебі есептің шарты бойынша $x_1 = 1,\ x_2 = 3$:

$$\int_L (8x - y)dx = \int_1^3 (8x - x)dx = \int_1^3 7xdx = 7\frac{x^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{7}{2}(9-1) = \frac{7}{2}8 = 28.$$

Интеграл астындағы өрнекті толықтай тек «у-тен» тәуелді деп қарастырсақ, онда интегралдау бағыты 1-ден 3-ке дейін болмақ, себебі есептің шарты бойынша $y_1 = 1,\ y_2 = 3$:

$$\int_L (8x - y)dx = \int_1^3 (8y - y)dy = \int_1^3 7ydy = 7\frac{y^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{7}{2}(9-1) = \frac{7}{2}8 = 28.$$

Интегралдау айнымалыларын өзгерткенмен екі жауап та бірдей болатынын көруге болады.

c) Жауабы: 28.

Мысал 3.5: Есептеңіз: $\int_L y^3 dx + (x + 2y)dy$, $L: x = y$, $O(2; 2)$, $A(4;4)$.

Шешімі:

а) Егер L қисығы $y=\varphi(x), a\le x\le b$ формуласымен берілсе, онда қисық сызықты интеграл

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b\left[P(x,\varphi(x))+Q(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\right]\cdot dx \qquad (3.2)$$

формуласымен есептеледі.

Егер L қисығы $x=\psi(y), c\le y\le d$ формуласымен берілсе, онда қисық сызықты интеграл

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_c^d\left[P(\psi(y),y)+Q(\psi(y),y)\cdot\psi'(y)\right]\cdot dy \qquad (3.3)$$

формуласымен есептеледі.

b) (3.2) формуласы бойынша интеграл астындағы өрнекті толықтай тек «х-тен» тәуелді деп қарастырсақ, онда интегралдау бағыты 2-ден 4-ке дейін болмақ, себебі есептің шарты бойынша $x_1 = 2,\ x_2 = 4$:

$$\int_L y^3 dx + (x + 2y)dy = \begin{vmatrix} x=y \\ dx=dy \end{vmatrix} = \int_2^4 x^3 dx + (x + 2x)dx = \int_2^4 x^3 dx + 3x dx =$$

$$= \int_2^4 (x^3 + 3x)dx = \frac{x^4}{4}\Big|_2^4 + 3\frac{x^2}{2}\Big|_2^4 = \left(\frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4}\right) + 3\left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right) = 64 - 4 + 3(8 - 2) = 78.$$

(3.3) формуласы бойынша интеграл астындағы өрнекті толықтай тек «у-тен» тәуелді деп қарастырсақ, онда интегралдау бағыты 2-ден 4-ке дейін болмақ, себебі есептің шарты бойынша $y_1 = 2,\ y_2 = 4$:

$$\int_L y^3 dx + (x + 2y)dy = \begin{vmatrix} x=y \\ dx=dy \end{vmatrix} = \int_2^4 y^3 dy + (y + 2y)dy =$$

$$= \int_2^4 y^3 dy + 3y dy = \int_2^4 (y^3 + 3y)dy = \frac{y^4}{4}\Big|_2^4 + 3\frac{y^2}{2}\Big|_2^4 = \left(\frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4}\right) + 3\left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right) =$$

$$= 64 - 4 + 3(8 - 2) = 78.$$

Интегралдау айнымалыларын өзгерткенмен екі жауап та бірдей болды.

c) Жауабы: 78 .

Мысал 3.6: Есептеңіз: $\int_L -7ydx + xdy,\ L: y=x^3,\ \mathrm{O}(0;0), \mathrm{A}(2;8).$

a) Егер L қисығы $y=\varphi(x), a\le x\le b$ формуласымен берілсе, онда қисық сызықты интеграл (8.1) формуласымен, ал егер L қисығы $x=\psi(y), c\le y\le d$ формуласымен берілсе, онда қисық сызықты интеграл (3.3) формуласымен есептелетіні жоғарғыдағы мысалында көрсетілді.

b) (3.2) формуласы бойынша интеграл астындағы өрнекті толықтай тек «х-тен» тәуелді деп қарастырсақ, онда интегралдау бағыты 0-ден 2-ге дейін болмақ, себебі есептің шарты бойынша $x_1=0,\ x_2=2$:

$$\int_L -7ydx+xdy=\left|\begin{matrix}y=x^3\\ dy=3x^2dx\end{matrix}\right|=\int_0^2 -7x^3dx+x\cdot 3x^2dx=\int_0^2 -4x^3dx=$$

$$=-4\int_0^2 x^3dx=-4\frac{x^4}{4}\Big|_0^2=-(2^4-0)=-16.$$

(3.3) формуласы бойынша интеграл астындағы өрнекті толықтай тек «у-тен» тәуелді деп қарастырсақ, онда интегралдау бағыты 0-ден 8-ге дейін болмақ, себебі есептің шарты бойынша $y_1 = 0,\ y_2 = 8$:

$$\int_L -7\,ydx + xdy = \left| \begin{array}{l} x = y^{\frac{1}{3}} \\ dx = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} dy \end{array} \right| = \int_0^8 -7y \cdot \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} dy + y^{\frac{1}{3}} dy =$$

$$= \int_0^8 \left(-\frac{7}{3} y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} \right) dy = -\frac{4}{3} \int_0^8 y^{\frac{1}{3}} dy = -\frac{4}{3} \frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \Bigg|_0^8 = -y^{\frac{4}{3}} \Big|_0^8 = -\left(\left(2^3\right)^{\frac{4}{3}} - 0 \right) = -16.$$

Бұл есепте де интегралдау айнымалыларын өзгерткенмен екі жауап та бірдей болатынына көз жеткіздік.

c) Жауабы: -16.

Қайталау сұрақтары

1. Екі еселі интегралда қисық сызықты координаттарға өту үшін қандай түрлендіру қолданылады?
2. Координаттар түрлендіруінің Якобианы дегеніміз не? Оны қалай есептейді?
3. Якобиан нөлден өзгеше болуы не үшін қажет?
4. Қисық сызықты координаттарға өткенде екі еселі интегралды есептеудің жалпы формуласын жазыңыз.
5. Полярлық координаттар жүйесі үшін Якобиан неге тең?



Әдебиеттер тізімі

1. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. I, II бөлімдер. Алматы 2000 ж.
2. Хисамиев Н.Г. Математика. Оқу құралы. 1, 2 бөлім. Өскемен: ШҚМТУ, 2006. - 271 б.
3. Махмеджанов Н. Жоғары математика есептерінің жинағы: оқу құралы. Алматы: Әл-Фараби ат.ҚазУ. - 2005.-341 б.
4. Қабдықайыр Қ. Жоғары математика. Алматы: Қазақ университеті, 2004. 562 б.
5. Айдос Е. Ж. Жоғары математика Т.2., Т.3. Алматы: Бастау , 2008. - 238 б.
6. Жолымбаев О.М. Математика. Алматы: [б. и.], 2004. - 384 б.
7. Сақабеков Ә. Техникадағы математика. Алматы: ҚБТУ, 2008. - 293 б

Назар аударғаныңызға рақмет!

