Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

БЕТКЕ ЖҮРГІЗІЛГЕН ЖАНАМА ЖАЗЫҚТЫҚ ПЕН НОРМАЛЬ. ЕКІ АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ ЭКСТРЕМУМЫ. ФУНКЦИЯНЫҢ ШЕКТЕЛГЕН ТҰЙЫҚ ОБЛЫСТАҒЫ ЕҢ ҮЛКЕН ЖӘНЕ ЕҢ КІШІ МӘНДЕРІ. БАҒЫТ БОЙЫНША ТУЫНДЫ ЖӘНЕ ГРАДИЕНТ.

Дәрістік сабақ жоспары:

1. Бетке жүргізілген жанама жазықтық пен нормаль.
2. Екі айнымалы функцияның экстремумы.
3. Функцияның шектелген тұйық облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндері.
4. Бағыт бойынша туынды және градиент.

.

2.1 Бетке жүргізілген жанама жазықтық пен нормаль

$U(x,y,z)=0$ айқын емес функциясымен анықталған бетке оның кез-келген $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктесінде *жанама жазықтық* жүргізуге болады. Оның теңдеуі:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)(x-x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)(y-y_0)+\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)(z-z_0)=0. \qquad (2.1)$$

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ жанасу нүктесінде жанама жазықтыққа перпендикуляр жүргізілген түзу *нормаль* деп аталады. Оның канондық теңдеуі:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)}. \qquad (2.2)$$

2.1-мысал. $3x^2 - y^2 + z^3 + xy + yz = 0$ бетінің $M_0(0;2;1)$ нүктесінде жүргізілген жанама жазықтығы және нормаль теңдеуін табу керек.

Шешімі: Берілген $M_0(0;2;1)$ нүктесіндегі функцияның дербес туындылары:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0(0;2;1)} = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = \left(3x^2 - y^2 + z^3 + xy + yz = 0\right)\Big|_x' = (6x + y)\Big|_{M_0(0;2;1)} = 2;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0(0;2;1)} = \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = \left(3x^2 - y^2 + z^3 + xy + yz = 0\right)\Big|_y' = (-2y + x + z)\Big|_{M_0(0;2;1)} = -3;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0(0;2;1)} = \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) = \left(3x^2 - y^2 + z^3 + xy + yz = 0\right)\Big|_z' = = (3z^2 + y)\Big|_{M_0(0;2;1)} = 5.$$

Демек, $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)(x-x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)(y-y_0)+\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)(z-z_0)=0$ түріндегі *жанама жазықтықтың теңдеуі:*

$$2(x-0)-3(y-2)+5(z-1)=0$$

немесе

$$2x-3y+5z+1=0.$$

ал $\frac{x-x_0}{\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)}$ түріндегі *нормаль теңдеуі:*

$$\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-1}{5}.$$

Параметрлік теңдеуі:

$$\begin{cases} x = x_0 + u'_x(M_0)t \\ y = y_0 + u'_y(M_0)t \\ z = z_0 + u'_z(M_0)t \end{cases}.$$

$z=f(x,y)$ айқын функциясымен анықталған бетке оның кез-келген $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктесінде жүргізілген *жанама жазықтығының* теңдеуі:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)(x-x_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)(y-y_0)=z-z_0, \qquad (2.3)$$

нормаль теңдеуі:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \qquad (2.4)$$

2.2-мысал. $z = 1 + x^2 + y^2$ бетінің $M_0(1;2;3)$ нүктесінде жүргізілген жанама жазықтығы мен нормаль теңдеуін табу керек.

Шешімі: z функциясының дербес туындылары $M_0(1;2;3)$ нүктесіндегі мәндері:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0(1,2,3)} = 2x\big|_{M_0(1,2,3)} = 2,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0(1,2,3)} = 2y\big|_{M_0(1,2,3)} = 4.$$

Осыдан, $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)(x-x_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)(y-y_0)=z-z_0$ түріндегі *жанама жазықтығының теңдеуі:*

$$2(x-1)+4(y-2)=z-3 \text{ немесе } 2x+4y-z-7=0,$$

ал $\frac{x-x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$ түріндегі *нормаль теңдеуі:*

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-1}.$$

Қайталау сұрақтары

1. Айқын емес U(x,y,z)=0 түрінде берілген бетке жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.
2. Берілген бетке нормаль түзуінің канондық теңдеуін жазыңыз.
3. z=f(x,y) айқын функциясымен берілген бет үшін жанама жазықтық пен нормаль түзуінің теңдеулері қалай өзгереді?



2.2 Екі айнымалы функцияның экстремумы.

2.1-анықтама. $z = f(x, y)$ функциясының $P(a,b)$ нүктесінде $f(a,b)$ *максимумы (минимумы)* бар деп айтамыз, егер барлық P нүктесінен өзге $P'(x, y)$ нүктелері үшін P нүктесінің жеткілікті аз аймағында $f(a,b) > f(x,y)$ $(f(a,b) < f(x,y))$ теңсіздігі орындалса. Функцияның максимумы немесе минимумы осы функцияның *экстремумдары* деп аталады.

Экстремумның қажетті шарты:

2.2-анықтама Дифференциалданатын $f(x,y)$ функциясының экстремумы болатын (a,b) нүктесі *кризистік нүкте* деп аталады. Ол

$$f'_x(a,b)=0,\ f'_y(a,b)=0 \qquad (2.5)$$

теңдеулер жүйесін шешу арқылы табылады.

(2.5) жүйесі $df(x,y)=0$ теңдеуіне эквивалентті.

Жалпы жағдайда, $f(x,y)$ функциясының $P(a,b)$ экстремум нүктесінде не $df(a,b)=0$, не $df(a,b)$ табылмайды.

Экстремумның жеткілікті шарты:

$f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$ және $A = f''_{xx}(a,b),\ B = f''_{xy}(a,b),\ C = f''_{yy}(a,b)$ болсын. Оның дискриминанты $\Delta = AC - B^2$.

Онда

1) егер $\Delta > 0$, онда функцияның $P(a,b)$ нүктесінде экстремумы бар. Егер $A < 0$ $(C < 0)$ болса, онда ол максимум нүктесі, егер $A > 0$ $(C > 0)$ болса, онда ол минимум нүктесі болады;
2) егер $\Delta < 0$ болса, онда $P(a,b)$ нүктесінде экстремум жоқ;
3) егер $\Delta = 0$, онда $P(a,b)$ нүктесінің экстремум нүктесі болу, болмауы ашық сұрақ болып қалады (қосымша зерттеулер қажет).

Үш және одан да көп айнымалы функциялар үшін де экстремумдарының қажетті және жеткілікті шарттары екі айнымалы функциялар сияқты анықталады.

2.3-мысал. $z = 2x^2 - xy + 3y^2 - 5x + 7y$ функциясын экстремумге зерттеу керек.

Шешімі:

Экстремумның жеткілікті шарты: екі айнымалы функция экстремум мәндерін тек оның барлық дербес туындылары нөлге тең болатын нүктелерінде ғана қабылдайды, яғни

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0.$$

Бірінші ретті дербес туындылары:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(2x^2 - xy + 3y^2 - 5x + 7y\right)'_x = 4x - y - 5,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(2x^2 - xy + 3y^2 - 5x + 7y\right)'_y = -x + 6y + 7.$$

Кризистік нүктесінің координаталарын табу үшін $\begin{cases} 4x - y - 5 = 0 \\ -x + 6y + 7 = 0 \end{cases}$ жүйесін шешсек $x = 1,\ y = -1$ шешімдерін аламыз, яғни $M(1;-1)$ нүктесі.

Экстремумның жеткілікті шарты:

$A = f''_{xx}(a,b)$, $B = f''_{xy}(a,b)$, $C = f''_{yy}(a,b)$ болса, оның дискриминанты $\Delta = AC - B^2$.

Демек, ізделінді $M(1;-1)$ кризистік нүктесіндегі екінші ретті дербес туындыларын есептейміз:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (4x - y - 5)_x' = 4,$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (4x - y - 5)_y' = -1,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-x + 6y + 7)_y' = 6.$$

Сонымен $\Delta = AC - B^2 = 4 \cdot 6 - (-1)^2 = 23 > 0$ болса шарт бойынша экстремум бар.

$A > 0, C > 0$ болғандықтан $M(1;-1)$ нүктесінде берілген функция минимум мәнін қабылдайды:

$$z_{\min} = z(M) = \left(2x^2 - xy + 3y^2 - 5x + 7y\right)_{M(1,-1)} =$$

$$= 2 \cdot 1^2 - 1 \cdot (-1) + 3(-1)^2 - 5 \cdot 1 + 7(-1) = -6.$$

Қайталау сұрақтары

1. Функцияның экстремумы (максимум және минимум) дегеніміз не?
2. Екі айнымалы дифференциалданатын функцияның экстремум нүктесінің қажетті шартын тұжырымдаңыз.
3. Кризистік нүкте деп қандай нүктені айтады? Оны қалай табады?
4. Екі айнымалы функцияның экстремумының жеткілікті шартын түсіндіріңіз. Дискриминант Δ пен A, B, C шамалары қалай анықталады?
5. Егер $\Delta>0$ болса, онда функцияның экстремумы бар бола ма? Оның максимум немесе минимум екенін қалай ажыратады?
6. Егер $\Delta<0$ болса, онда нүктеде экстремум бола ма?
7. Егер $\Delta=0$ болса, онда қандай қосымша зерттеулер қажет?



2.3 Функцияның шектелген тұйық облыста ең үлкен және ең кіші мәндері

1. Вейерштрасс теоремасы: Егер функция $z = f(x, y)$ тұйық және шектелген облыста үздіксіз болса, онда ол осы облыста өзінің ең үлкен және ең кіші мәндерін қабылдайды.

2. Экстремумдарды табу алгоритмі:

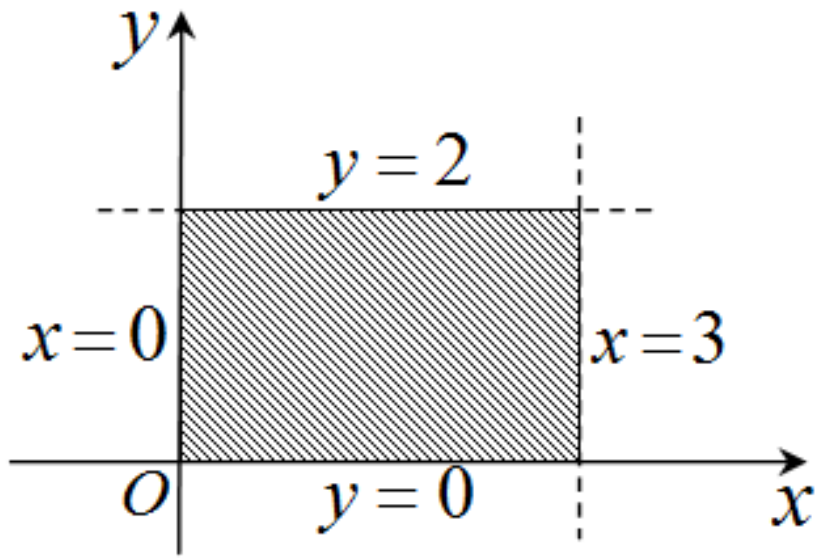
- Функция облысының ішкі нүктелеріндегі барлық кризистік нүктелерін табу;
- Функцияны облыстың шекарасында зерттеу;
- Алынған барлық мәндерді салыстыру.

3. Кризистік нүктелер: Бұл функцияның:

- Бірінші ретті дербес туындылары нөлге тең болатын нүктелер $\left(f_x(x, y) = 0, f_y(x, y) = 0\right)$;
- Немесе дербес туындылары жоқ нүктелер.

4. Маңызды тұжырым: *Тұйық облыстағы дифференциалданатын функцияның ең үлкен (ең кіші) мәні* не облыстың ішіндегі кризистік нүктелерде, не шекараның нүктелерінде болады.

2.4-мысал. $f(x,y)=x^2+y^2-2x-4y+5$ функциясының $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 3,\ 0\le y\le 2\}$ облысында ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек (2.1-сурет).



2.1-сурет

Шешімі:

1. Ішкі нүктелердегі кризистік нүктелерді табу

Бірінші ретті дербес туындыларды табамыз:

$$f_x(x,y)=2x-2=0 \Rightarrow x=1,$$
$$f_y(x,y)=2y-4=0 \Rightarrow y=2.$$

Кризистік нүкте: $(1,2)$.

Бірақ бұл нүкте біздің облыстың ішінде ме? $y=2$ шекарада жатыр (жоғарғы жиек). Демек, бізде ішкі кризистік нүкте жоқ.

а) Төменгі жиек: $y=0,\ 0\le x\le 3$

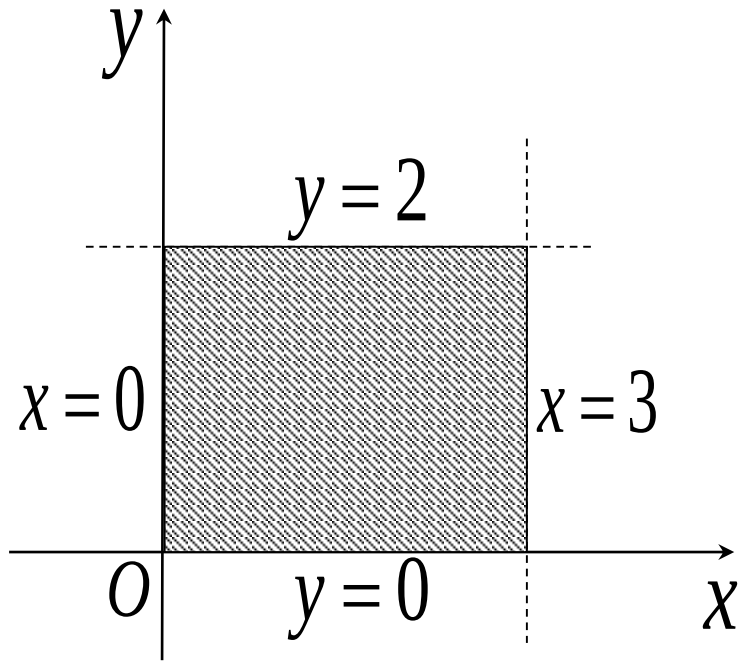
$$f(x,0)=x^2-2x+5$$

Бұл x бойынша квадраттық функция. Экстремумдары:

$$f'(x,0)=2x-2=0 \Rightarrow x=1$$

Мәндер:

- $f(1,0)=1-2+5=4$
- Шеткі нүктелер: $f(0,0)=5, f(3,0)=9-6+5=8$.



б) Жоғарғы жиек: $y=2,\ 0\le x\le 3$

$$f(x,2)=x^2-2x+1=(x-1)^2$$

- $f(1,2)=0$
- Шеткі нүктелер: $f(0,2)=1, f(3,2)=4$.

в) Сол жиек: $x=0,\ 0\le y\le 2$

$f(0,y)=y^2-4y+5$

$f'(0,y)=2y-4=0 \Rightarrow y=2$

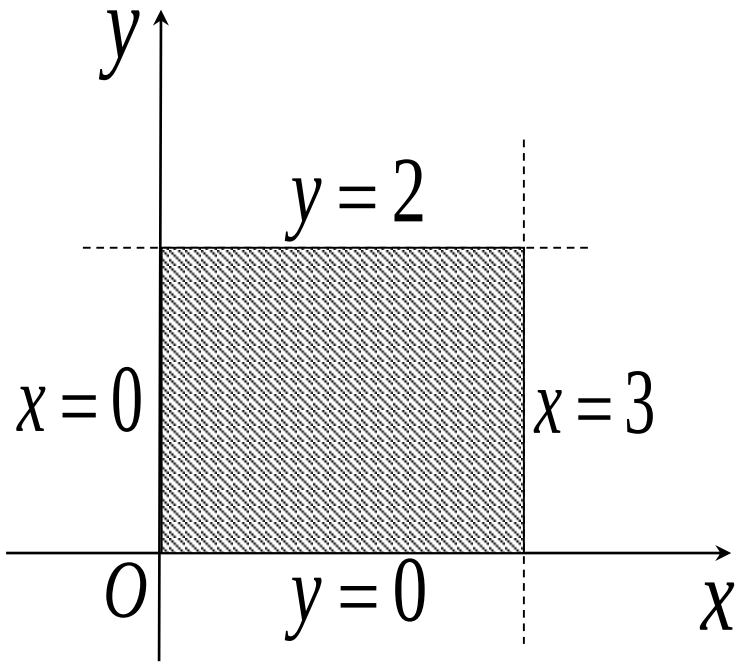
- $f(0,2)=1$ (бұрын есептелген)
- Шеткі нүктелер: $f(0,0)=5, f(0,2)=1$.

г) Оң жиек: $x=3,\ 0\le y\le 2$

$f(3,y)=y^2-4y+8$

$f'(3,y)=2y-4=0 \Rightarrow y=2$

- $f(3,2)=4$ (бұрын есептелген)
- Шеткі нүктелер: $f(3,0)=8, f(3,2)=4$.



3. Барлық мәндерді салыстыру

Барлық нүктелердегі функция мәндері:

1. $f(1,0)=4$
2. $f(0,0)=5$
3. $f(3,0)=8$
4. $f(1,2)=0$ **- ең кіші мән**
5. $f(0,2)=1$
6. $f(3,2)=4$

Нәтиже:

- **Ең кіші мән:** 0, (1,2) нүктесінде (шекарада стационар нүкте)
- **Ең үлкен мән:** 8, (3,0) нүктесінде (шекараның шеткі нүктесі/ бұрышында)

Қорытынды

Бұл мысалда:

1. Ішкі кризистік нүктелер болмады;
2. Ең кіші мән шекарадағы стационар нүктеде (y=2 түзуіндегі x=1)
3. Ең үлкен мән шекараның бұрышында (x=3, y=0)

Бұл теорияны растайды: тұйық облыста функцияның экстремумдары *не ішкі кризистік нүктелерде, не шекарада* болады.

Қайталау сұрақтары

1. Вейерштрасс теоремасын тұжырымдаңыз.
2. Тұйық және шектелген облыста функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу алгоритмін көрсетіңіз.
3. Кризистік нүктелер қандай екі жағдайда пайда болады?
4. Тұйық облыстағы дифференциалданатын функцияның ең үлкен (ең кіші) мәні қай нүктелерде бола алады?



2.4 Бағыт бойынша туынды және градиент.

$z=f(x,y)$ функциясы $M(x,y)$ нүктесінің бір аймағында анықталған және $\bar{e}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ бірлік векторы мен бағыты анықталған $M(x,y)$ нүктесі бойында жататын l бағыты (түзуі) берілсін.

Мұнда $\bar{e}=\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$, яғни $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ (немесе $\frac{3\pi}{2}$) және $\cos\alpha$ мен $\cos\beta$ шамалары l түзуінің *бағыттаушы косинустары* деп аталады. α - l түзуінің абцисса өсінің оң бағытымен, β - ордината өсінің оң бағытымен жасайтын бұрыштары.

x айнымалысына Δx, ал y айнымалысына Δy өсімшесін $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ нүктесі l түзуінің бойында жататындай және $M(x,y)$ нүктесінен $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ нүктесіне көшу $\bar{e}$ векторының бағыты бойынша жасалатындай етіп алайық. Сонда

$$\Delta_l z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

айырмасы z функциясының l *бағыты бойынша өсімшесі* деп аталады. Егер $MM_1 = \Delta l$ болса, онда $\Delta x = \Delta l \cdot \cos\alpha, \Delta y = \Delta l \cdot \cos\beta$, сондықтан $\Delta_l z = f(x+\Delta l \cdot \cos\alpha, y+\Delta l \cdot \cos\beta) - f(x,y)$.

2.3-анықтама. Егер $z=f(x,y)$ функциясының l бағыты бойынша $\Delta_l z$ өсімшесінің Δl көшіру шамасына қатынасының Δl нөлге ұмтылғандағы шегі бар болса, ол шаманы z *функциясының l бағыты бойынша туындысы* деп атаймыз:

$$z'_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l} . \qquad (2.6)$$

$z'_l = \dfrac{\partial z}{\partial l}$ туындысы l бағыты бойынша өзгеру жылдамдығын сипаттайды. z'_x, z'_y дербес туындылары функцияның OX және OY өстеріне параллель бағыттар бойынша туындылары болады.

Анықтамадан

$$z'_l = z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta . \qquad (2.7)$$

2.4-анықтама. Координаттары $\{z'_x, z'_y\}$ болатын ∇z векторын $z=f(x,y)$ функциясының *градиенті* деп атайды:

$$\nabla z = gradz = \{z'_x, z'_y\}.$$

∇z векторы мен $\bar{e} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ бірлік векторының скалярлық көбейтіндісі:

$$(\nabla z, \bar{e}) = z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta . \qquad (2.8)$$

(2.7), (2.8) теңдіктерінен

$$z'_l = (\nabla z, \bar{e}).$$

скаляр көбейтіндінің ең үлкен мәні векторлар бірдей бағытталғанда болады. Сондықтан берілген нүктедегі функция градиенттің бағыты осы нүктедегі функция өзгеру жылдамдығының ең үлкен мән қабылдайтын бағыты болады.

2.5-мысал. $u(M) = xy + yz + 1$ функциясы мен $M_1(0;-2;-1)$, $M_2(3;3;5)$ нүктелері берілген. Осы функцияның M_1 нүктесіндегі $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ векторының бағыты бойыншы туындысын және $gradu\,(M_1)$ табу керек.

Шешімі: $u(M)$ функциясының M_1 нүктесіндегі $\overline{M_1M_2}$ бағыты бойынша туындысы

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial \vec{a}} = u'_x(M_1)\cos\alpha + u'_y(M_1)\cos\beta + u'_z(M_1)\cos\gamma$$

формуласымен табылады, мұндағы $\vec{v} = \{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$ векторы $\overline{M_1M_2}$ бағытының бірлік векторы.

Бірінші ретті дербес туындылары:

$$u'_x(M_1) = y\big|_{M_1} = -2,$$

$$u'_y(M_1) = (x+z)\big|_{M_1} = -1,$$

$$u'_z(M_1) = y\big|_{M_1} = -2.$$

Ал $\overline{M_1M_2}$ векторының координаталары мен модулі:

$$\overline{M_1M_2} = \{3-0;\ 3-(-2);\ 5-(-1)\} = \{3;5;6\},$$
$$|M_1M_2| = \sqrt{9+25+36} = \sqrt{70}.$$

Бағыттаушы косинустары:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|M_1M_2|} = \frac{3}{\sqrt{70}};$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|M_1M_2|} = \frac{5}{\sqrt{70}};$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|M_1M_2|} = \frac{6}{\sqrt{70}}.$$

Демек, $u(M)$ функциясының M_1 нүктесіндегі $\overline{M_1M_2}$ *бағыты бойынша туындысы*

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial \vec{a}} = (-2)\cdot\frac{3}{\sqrt{70}} + (-1)\frac{5}{\sqrt{70}} + (-2)\frac{6}{\sqrt{70}} = -\frac{23}{\sqrt{70}}.$$

Анықтама бойынша *градиент*:

$$\overline{grad}\, u(M_1) = u'_x(M_1)\bar{i} + u'_y(M_1)\bar{j} + u'_z(M_1)\bar{k}.$$

Сонымен

$$\overline{grad}\, u(M_1) = -2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}.$$



Қайталау сұрақтары

1. z=f(x,y) функциясының l бағыты бойынша туындысының анықтамасын беріңіз.
2. Бағыт бойынша туындыны дербес туындылар арқылы қалай есептейді?
3. z=f(x,y) функциясының градиенті деп не аталады? Оны қалай белгілейді және қалай есептейді?
4. Бағыт бойынша туынды мен градиент арасындағы байланысты көрсететін формуланы жазыңыз.
5. Градиент векторының бағыты функцияның қандай өзгеруін сипаттайды?
6. Үш айнымалы функция үшін бағыт бойынша туындыны есептеу формуласы қалай өзгереді?

Әдебиеттер тізімі

1. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. I, II бөлімдер. Алматы 2000 ж.
2. Хисамиев Н.Г. Математика. Оқу құралы. 1, 2 бөлім. Өскемен: ШҚМТУ, 2006. - 271 б.
3. Махмеджанов Н. Жоғары математика есептерінің жинағы: оқу құралы. Алматы: Әл-Фараби ат.ҚазУ. - 2005.-341 б.
4. Қабдықайыр Қ. Жоғары математика. Алматы: Қазақ университеті, 2004. 562 б.
5. Айдос Е. Ж. Жоғары математика Т.2., Т.3. Алматы: Бастау , 2008. - 238 б.
6. Жолымбаев О.М. Математика. Алматы: [б. и.], 2004. - 384 б.
7. Сақабеков Ә. Техникадағы математика. Алматы: ҚБТУ, 2008. - 293 б

Назар аударғаныңызға рақмет!

