Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

КӨП АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР

Дәрістік сабақ жоспары:

1. Көп айнымалы функциялар туралы негізгі ұғымдар;
2. Көп айнымалы функцияның шектері мен үзіліссіздігі;
3. Дербес туындылар;
4. Айқын түрде берілген функциялардың дербес туындылары;
5. Айқын емес функциясының дифференциалы;
6. Күрделі функцияның туындысы;
7. Толық туынды;
8. Толық дифференциал;
9. Жоғарғы ретті дербес туындылар;
10. Аралас туындылар туралы теорема;
11. Жоғарғы ретті толық дифференциалдар.

1.1. Көп айнымалы функциялар туралы негізгі ұғымдар

Анықтама 1.1. *Екі (үш) айнымалылы функциялар* деп анықталу облысы D жазықтықтың (кеңістіктің) ішкі жиыны болатын, ал мәндерінің облысы E нақты сандар өсінде жататын функцияларды айтамыз.

Егер D анықталу облысы Oxy жазықтығына тиісті болса, ал E мәндер облысы Oz өсінде жататын болса, онда ондай екі айнымалы функциялардың жазылымы: $z = f(x, y)$.

Анықтама 1.2. Жазықтықтағы радиусы r болатын $M(x_0, y_0)$ *нүктесінің (*немесе *кеңістіктегі* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *нүктесінің) аймағы* деп радиусы r, центрі M_0 нүктесі болатын $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2$ *шеңберсіз дөңгелекті* (немесе $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<r^2$ теңсіздігімен анықталатын *сферасыз шарды*) айтамыз. Бұл аймақты $U_r(M_0)$ арқылы белгілейік.

Анықтама 1.3. Егер нүктенің радиусы r болатын аймағы D жиынымен және оның толықтауышымен қиылысса, онда M_0 нүктесі D жиынының *шекаралық нүктесі* деп аталады.

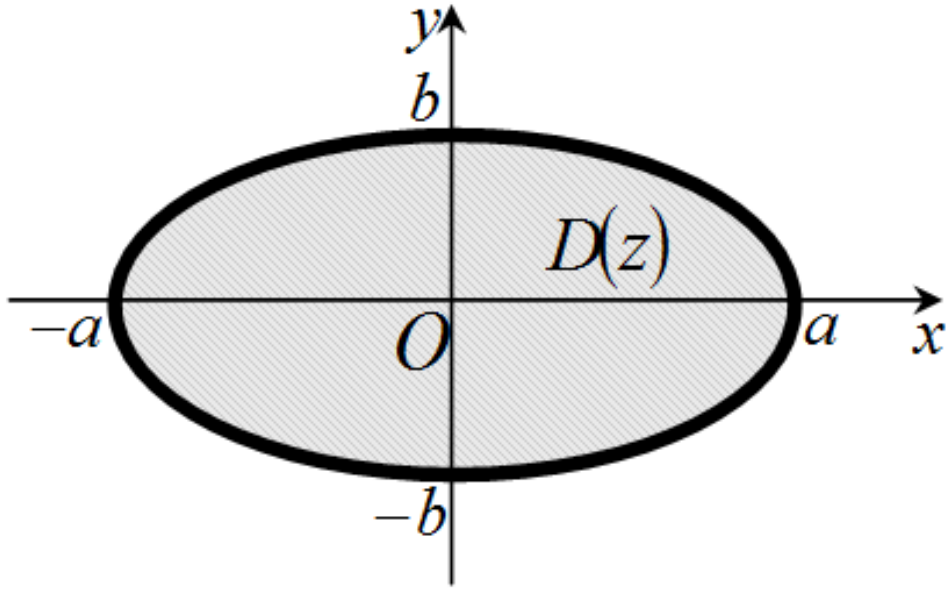
D жиынының барлық шекаралық нүктелерінің жиыны осы *жиынның шекарасы* деп аталады және былай белгіленеді $\Gamma(D)$.

Анықтама 1.4. Барлық $\Gamma(D)$ шекараларын ұстайтын жиын *тұйық жиын* деп аталады. Өзінің шекарасының бірде-бір нүктесі жатпайтын D жиыны *ашық жиын* деп аталады.

1.1-мысал. $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ функциясының $D(z)$ анықталу облысын табыңыз.

Шешімі:

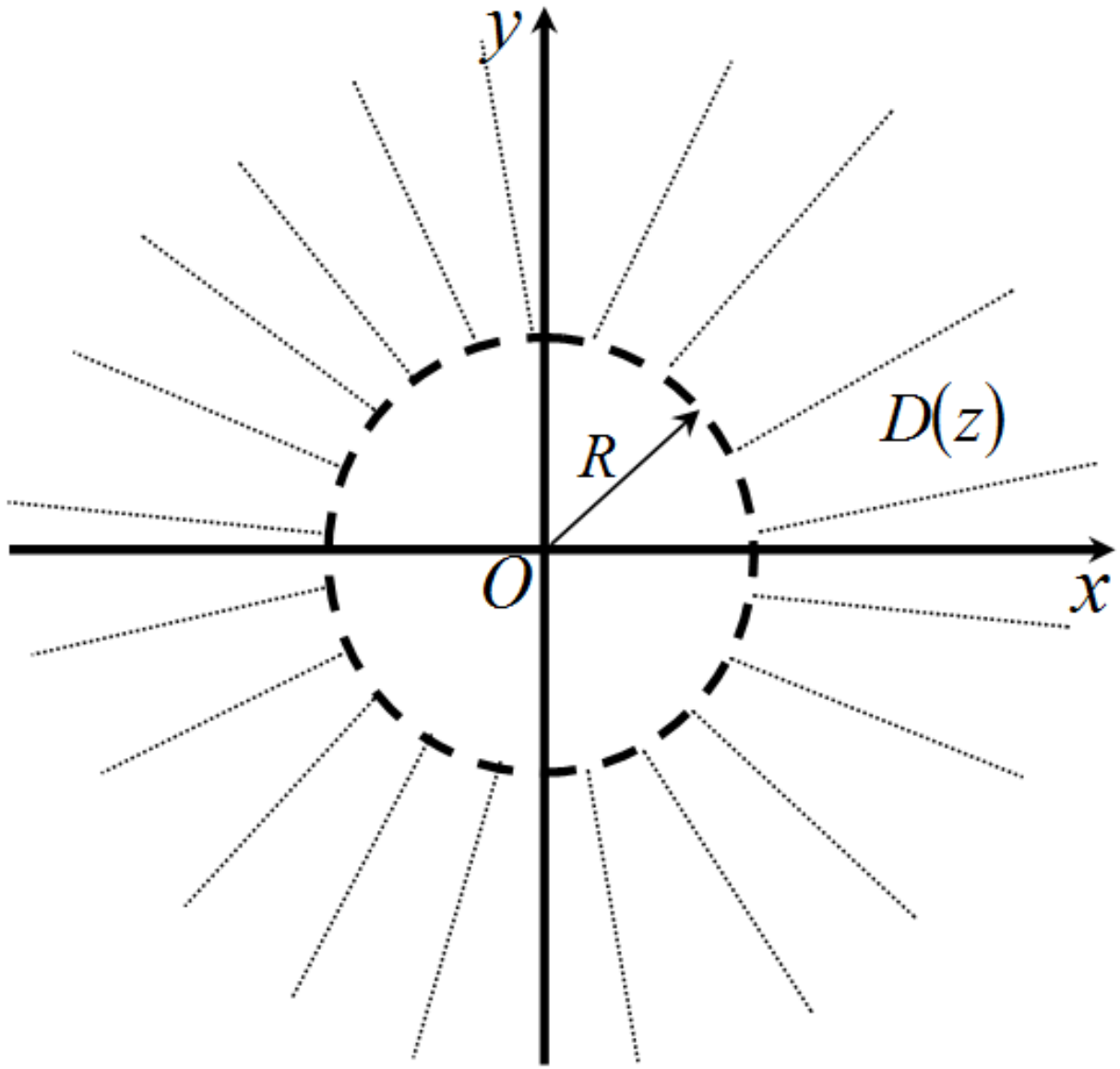
$$1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\geq 0\Rightarrow -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\geq -1\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1.$$



1.2-мысал. $z = \dfrac{1}{R^2 - x^2 - y^2}$ функциясының $D(z)$ анықталу облысын табыңыз.

Шешімі:

$$R^2 - x^2 - y^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \neq R^2$$

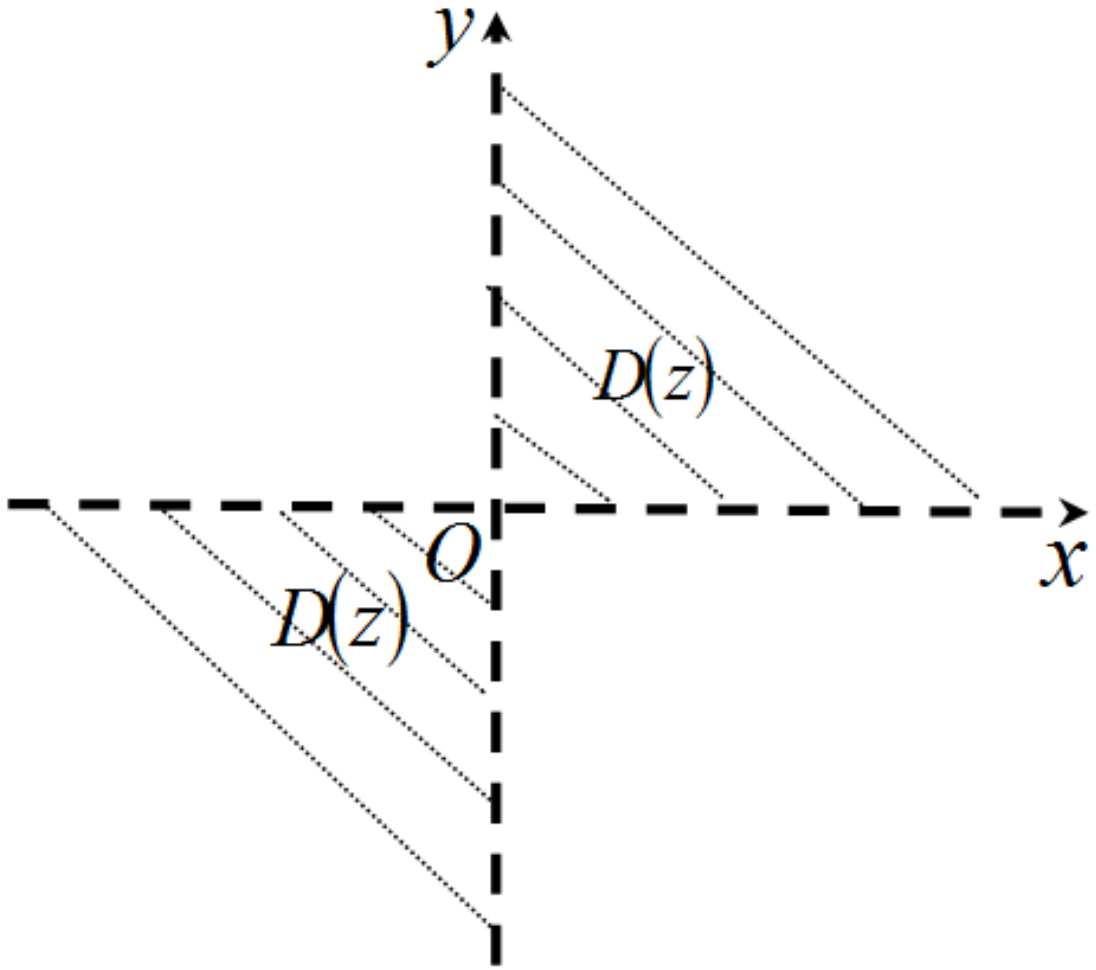


1.3-мысал. $z = \ln xy$ функциясының $D(z)$ анықталу облысын табыңыз.

Шешімі:

$$\ln xy > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \text{немесе} \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}.$$

$$xy > 0$$



Қайталау сұрақтары

1. Екі айнымалы функция дегеніміз не? Оны қалай белгілейміз және мысал келтіріңіз.
2. Функцияның анықталу облысын қалай анықтайды? Мысал арқылы түсіндіріңіз.
3. Нүктенің аймағы (окрестность) ұғымын анықтап, математикалық жазылымын көрсетіңіз.
4. Шекаралық нүкте деген не? Оның анықтамасын түсіндіріңіз.
5. Ашық жиын мен тұйық жиынның айырмашылығы неде? Мысал келтіріңіз.



1.2 Көп айнымалы функцияның шектері мен үзіліссіздігі

Жоғарыда қарастырылған екі және үш айнымалы функциялар үшін енгізілген ұғымдарды n айнымалы функциялар үшін жалпылауға болады.

1.5-анықтама. n айнымалы функция деп – анықталу облысы D R^n-да жататын, ал мәндер облысы нақты өсте жататын

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

функциясын айтамыз. Бұндай функция D -дан алынған әрбір $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ жиынтығына тек бір ғана y санын сәйкестікке қояды.

1.6-анықтама. A саны $z=f(x,y)$ *функциясының* (x_0,y_0) *нүктесіндегі шегі* деп аталады, егер әрбір $\varepsilon>0$ үшін $\delta>0$ саны табылып, $U_\delta(x_0,y_0)$ аймағындағы барлық (x,y) үшін, осы нүктеден басқа нүктелерде, төмендегі теңсіздік орындалса

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

Егер $z=f(x,y)$ функциясының (x_0,y_0) нүктесіндегі шегі A болса, онда ол былай белгіленеді:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

Бұрын қарастырылған бір айнымалы функциялардың шектерінің барлық қасиеттері көп айнымалы функциялар үшін де орынды.

1.4-мысал. $A = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ шегін есептеңіз.

Шешімі:

$$A=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\frac{0}{0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{x^2+y^2+1-1}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2+1}+1=2.$$

Жауабы: $A=2.$

1.5-мысал. $A = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{x^2\cdot y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ шегін есептеңіз.

Шешімі:

$$A=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{x^2\cdot y^2+1}-1}{x^2+y^2}=\frac{0}{0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\left(\sqrt{x^2\cdot y^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2\cdot y^2+1}+1\right)}{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2\cdot y^2+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2\cdot y^2+1-1}{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2\cdot y^2+1}+1\right)}=\frac{0}{0}=\left|y=kx\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot k^2x^2}{\left(x^2+k^2x^2\right)\left(\sqrt{x^2\cdot k^2x^2+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^4}{x^2\left(1+k^2\right)\left(\sqrt{k^2x^4+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^2}{\left(1+k^2\right)2}=\frac{0}{2\left(1+k^2\right)}=0.$$

Жауабы: $A=0.$

1.6-мысал. $A = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ шегін есептеңіз.

Шешімі:

$$A=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{0}{0}=\left|y=kx\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2kx^2}{x^2\left(1+k^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2k}{1+k^2}=$$ шегі жоқ.

Жауабы: шегі жоқ.

1.7-анықтама. $z = f(x,y)$ функциясы (x_0, y_0) *нүктесінде үзіліссіз* деп аталады, егер мынадай үш шарт орындалса:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ шегі табылса

2) (x_0, y_0) нүктесіндегі функцияның мәні табылса

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

1.7-мысал. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\cdot y^2}{x^2+y^2}, & \text{егер } x\neq 0,\ y\neq 0\\ 0, & \text{егер } x=0,\ y=0\end{cases}$ үзіліссіздікке зерттеңіз.

Шешімі:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2\cdot y^2}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} = \left|y = kx\right| = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^4}{x^2\left(1+k^2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^2}{1+k^2} = \frac{0}{1+k^2} = 0.$$

Есептің шарты бойынша $f(0,0)=0$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ үзіліссіздіктің шарты бойынша:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2\cdot y^2}{x^2+y^2} = f(0,0) = 0.$$

Жауабы: $f(x,y)$ функциясы $(0,0)$ нүктесінде үзіліссіз.

1.8-мысал. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot y}{x^2+y^2}, & \text{егер } x\neq 0,\ y\neq 0\\ 0, & \text{егер } x=0,\ y=0\end{cases}$ үзіліссіздікке зерттеңіз.

Шешімі:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x\cdot y}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} = \left|y = kx\right| = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2\left(1+k^2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2}{1+k^2} =$$ шегі жоқ.

Есептің шарты бойынша $f(0,0)=0$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ үзіліссіздіктің шарты бойынша:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x\cdot y}{x^2+y^2} \neq f(0,0).$$

Жауабы: $f(x,y)$ функциясы $(0,0)$ нүктесінде үзілісті.

Қайталау сұрақтары

1. Көп айнымалы функцияның шегінің анықтамасын тұжырымдап, ε-δ тілінде жазыңыз.
2. Екі айнымалы функцияның шегі жоқ дегеніміз не? Мысал арқылы түсіндіріңіз.
3. Үзіліссіздіктің үш шартын атап, олардың математикалық жазылуын көрсетіңіз.
4. Екі айнымалы функцияның нүктеде үзіліссіз болуы мен бір айнымалы функцияның үзіліссіздігінің айырмашылығы неде?



1.3 Дербес туындылар.
Айқын түрде берілген функциялардың дербес туындылары

$y = const$ деп есептеп, x-ке Δx өсімшесін береміз $(x + \Delta x \in D)$.

Онда z *функциясының* x *бойынша дербес өсімшесі*:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Дәл осылай, z *функциясының* y *бойынша дербес өсімшесін* табамыз:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Егер x пен y -тің екеуіне де сәйкесінше Δx , Δy өсімшелерін беретін болсақ, онда z функциясының толық өсімшесін аламыз:

$$\Delta z = f\left(x+\Delta x; y+\Delta y\right)- f\left(x; y\right) \qquad (1.1)$$

Жалпы жағдайда, $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$ болатынын айта кеткен жөн.

1.8-анықтама. Егер $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ $\left[\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} \right]$ табылса, оны z функциясының x бойынша [z функциясының y бойынша] дербес туындысы деп айтамыз және былай белгілейміз:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ z'_x,\ \frac{\partial f}{\partial x},\ f'_x \qquad \left[\frac{\partial z}{\partial y},\ z'_y,\ \frac{\partial f}{\partial y},\ f'_y \right].$$

Анықтамадан, егер қандай да бір айнымалы бойынша дербес туынды табатын болсақ, онда бұл айнымалыдан басқа айнымалылардың барлығын тұрақты деп қарастырамыз.

1.11-мысал. Егер $z = arctg\frac{x}{y}$ болса $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің M(0;1) нүктесіндегі мәнін табыңыз.

Шешімі:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x\big|_{y=const} = \left(arctg\,\frac{x}{y}\right)' = \left|\begin{array}{l} (arctgu)' = \dfrac{1}{1+u^2}u' \\ \left(\dfrac{u}{c}\right)' = \dfrac{1}{c}u' \\ \text{формулалар ы бойынша} \end{array}\right| = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{y^2+x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{\dfrac{y^2+x^2}{y}} = \frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y\Big|_{x=const} = \left(arctg\frac{x}{y}\right)_y' = \left|\begin{array}{l}(arctgu)' = \dfrac{1}{1+u^2}u' \\ \left(\dfrac{c}{u}\right)' = -\dfrac{c}{u^2}u' \\ \text{формулалары бойынша}\end{array}\right| = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot x\left(-\frac{1}{y^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\frac{y^2+x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2}.$$

$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$ өрнегінің M(0;1) нүктесіндегі мәні:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Big|_{M(0;1)}=\left(\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{x}{x^2+y^2}\right)\Big|_{M(0;1)}=\frac{y-x}{x^2+y^2}\Big|_{M(0;1)}=\frac{1-0}{0^2+1^2}=1.$$

Жауабы: 1.

1.12-мысал. Егер $u = x^3 + yz^2 + 3yx - x + z$ болса $\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$ өрнегінің $M(0;1;2)$ нүктесіндегі мәнін табыңыз.

Шешімі:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x\big|_{y,z=const} = \left| \begin{array}{l} \left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1}u' \\ \left(cu\right)' = cu' \\ \text{формулалары бойынша} \end{array} \right| = \left(x^3 + yz^2 + 3yx - x + z\right)'_x$$

$$= 3x^2 + 3y - 1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u'_y\big|_{x,z=const} = \left(x^3 + yz^2 + 3yx - x + z\right)'_y = z^2 + 3x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = u'_z\big|_{x,y=const} = \left(x^3 + yz^2 + 3yx - x + z\right)'_z = 2yz + 1.$$

$\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$ өрнегінің M(0;1;2) нүктесіндегі мәні:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{M(0;1;2)} = \left(3x^2 + 3y - 1\right) - 2\left(z^2 + 3x\right) + \left(2yz + 1\right) =$$

$$= \left(3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 1 - 1\right) - 2\left(2^2 + 3 \cdot 0\right) + \left(2 \cdot 1 \cdot 2 + 1\right) = -1$$

Жауабы: -1.

Қайталау сұрақтары

1. Дербес туынды дегеніміз не? Оның анықтамасын беріп, физикалық мағынасын түсіндіріңіз.
2. Екі айнымалы функцияның бірінші ретті дербес туындыларын қалай есептейді? Мысал келтіріңіз.
3. Дербес туынды мен жай туындының айырмашылығы неде?
4. Үш айнымалы функцияның дербес туындыларын қалай анықтайды? Мысал келтіріңіз.



1.4 $F(x,y,z)=0$ айқын емес функциясының дифференциалы

F, F'_x, F'_y, F'_z табылып және үзіліссіз болса, онда екі айнымалы функция үшін:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}, \quad F'_z \neq 0.$$

Бір айнымалы $F(x,y)=0$ функциясы үшін: $y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

1.13-мысал. $xyz + x^3 - y^3 - z^3 + 5 = 0$ айқын емес функциясының дербес туындыларын табыңыз.

Шешімі:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{yz + 3x^2}{xy - 3z^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{xz - 3y^2}{xy - 3z^2}.$$

Қайталау сұрақтары

1. Айқын емес функция дегеніміз не? Мысал келтіріңіз.
2. Айқын емес функцияның дербес туындыларын табу формуласын шығарыңыз.
3. Бір айнымалы айқын емес функцияның туындысын табу формуласын жазыңыз.



1.5 Күрделі функцияның туындысы. Толық туынды

$z = F(u;v)$ функциясы берілсін, мұндағы $u = \varphi(x;\ y)$, $v = \psi(x;y)$.

Онда F, φ, ψ функцияларының үзіліссіз дербес туындылары табылса:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

1.14-мысал. $z = \sin(uv)$ функциясының $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындыларын табыңыз, мұндағы $u = 2x + 3y, \quad v = xy.$

Шешімі:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = v\cos(uv)\cdot 2 + \cos(uv)\cdot u\cdot y =$$

$$= (2v + yu)\cos(uv) = (2xy + y(2x + 3y))\cos((2x + 3y)xy) =$$

$$= (4xy + 3y^2)\cos(2x^2y + 3xy^2);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = v\cos(uv)\cdot 3 + \cos(uv)\cdot u \cdot x =$$

$$= (3v + ux)\cos(uv) = (3xy + (2x + 3y)x)\cos((2x + 3y)xy) =$$

$$= (6xy + 2x^2)\cos(2x^2y + 3xy^2).$$

Егер $z = F(x, y, u)$ функциясы берілсе, мұндағы $y = f(x)$, $u = \varphi(x)$, онда

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}$$ - *толық туындының формуласы.*

1.15-мысал. $z = x + y^2 + u^3$ функциясының $\frac{dz}{dx}$ туындысын табыңыз, мұндағы $y = \sin\ x, \quad u = \cos\ x.$

Шешімі:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} = 1 + 2y\cos x + 3u^2(-\sin x) =$$

$$= 1 + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x\sin x = 1 + \sin 2x - 3\cos^2 x\sin x.$$

Қайталау сұрақтары

1. Күрделі функция дегеніміз не? Мысал келтіріңіз.
2. Екі айнымалы күрделі функцияның дербес туындысын табу формуласын шығарыңыз.
3. Толық туынды деген не? Оны қай жағдайда қолданамыз?
4. Толық дифференциал мен толық туындының айырмашылығы неде?



1.6. Толық дифференциал

1.9-анықтама. $z = f(x;y)$ функциясының дифференциалы былай белгіленеді $(\Delta x = dx,\ \Delta y = dy)$:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

1.16-мысал. $z = \sin(xy)$ функциясының dz толық дифференциалын табыңыз.

Шешімі:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = y\cos(xy)dx + x\cos(xy)dy = \cos(xy)(ydx + xdy).$$

Қайталау сұрақтары

1. Толық дифференциал дегеніміз не? Оның формуласын жазыңыз.
2. Толық дифференциалды функцияның жуықтап есептеулерінде қалай қолданады? Мысал келтіріңіз.
3. Толық дифференциалдың геометриялық мағынасын түсіндіріңіз.



1.7 Жоғарғы ретті дербес туындылар. Аралас туындылар туралы теорема

1.9-анықтама. $z = f(x;y)$ функциясының дифференциалы былай белгіленеді $(\Delta x = dx,\ \Delta y = dy)$:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

$z = f(x;y)$ функциясы беріліп, оның f'_x және f'_y дербес туындылары табылсын.

Екінші ретті дербес туынды деп, бірінші ретті дербес туындының дербес туындысын айтамыз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x;y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x;y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

$n > 2$ ретті дербес туындылар осыған сәйкес табылады.

1.1-теорема (Шварц теоремасы). Егер $z = f(x;y)$ функциясы мен f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} анықталған, $M(x;\ y)$ нүктесінде және оның қандай да бір аймағында f''_{xy}, f''_{yx} үзіліссіз болса, онда бұл нүктеде $f''_{xy} = f''_{yx}$.

1.17-мысал. $z = x^3 + x^2 y - 5xy^3 + y^5$ функциясының $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ екінші ретті дербес туындыларын табыңыз.

Шешімі: Бірінші ретті дербес туындылары:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = 3x^2 + 2xy - 5y^3; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = x^2 - 15xy^2 + 5y^4;$$

Екінші ретті дербес туындылары:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = \left(3x^2 + 2xy - 5y^3\right)'_x = 6x + 2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = \left(3x^2 + 2xy - 5y^3\right)'_y = 2x - 15y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = \left(x^2 - 15xy^2 + 5y^4\right)'_x = 2x - 15y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = \left(x^2 - 15xy^2 + 5y^4\right)'_y = -30xy + 20y^3.$$

Қайталау сұрақтары

1. Екінші ретті дербес туындыларды қалай анықтайды? Олардың белгіленуін көрсетіңіз.
2. Шварц теоремасын тұжырымдап, оның маңыздылығын түсіндіріңіз.
3. Аралас туындылар туралы теореманың шарттарын атаңыз.



1.8 Жоғарғы ретті толық дифференциалдар

Жоғарғы ретті толық дифференциалдар (символдық формуласы)

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z$$ формуласымен есептеледі.

$z = f(x, y)$ функциясының *екінші ретті дифференциалы:*

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 .$$

$z = f(x, y)$ функциясының *үшінші ретті дифференциалы*:

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{dx^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Қайталау сұрақтары

1. Екінші ретті толық дифференциалдың формуласын жазыңыз.
2. Үшінші ретті дифференциалдың құрылымы қандай? Оны биномдық формуламен салыстырыңыз.
3. Символдық формула арқылы жоғары ретті дифференциалдарды қалай есептейді?



Әдебиеттер тізімі

1. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. I, II бөлімдер. Алматы 2000 ж.
2. Хисамиев Н.Г. Математика. Оқу құралы. 1, 2 бөлім. Өскемен: ШҚМТУ, 2006. - 271 б.
3. Махмеджанов Н. Жоғары математика есептерінің жинағы: оқу құралы. Алматы: Әл-Фараби ат.ҚазУ. - 2005.-341 б.
4. Қабдықайыр Қ. Жоғары математика. Алматы: Қазақ университеті, 2004. 562 б.
5. Айдос Е. Ж. Жоғары математика Т.2., Т.3. Алматы: Бастау , 2008. - 238 б.
6. Жолымбаев О.М. Математика. Алматы: [б. и.], 2004. - 384 б.
7. Сақабеков Ә. Техникадағы математика. Алматы: ҚБТУ, 2008. - 293 б

Назар аударғаныңызға рақмет!

