Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дәрістік сабақ 9

Жегалкин көпмүшелігі. Буль функцияларының толық кластары

ДӘРІСТІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. Кіріспе.
2. Жегалкин көпмүшелігі.
3. Жегалкин көпмүшелігін құру әдістері.
4. Буль функцияларының толық кластары.
5. Пост теоремасы.
6. Күрделі мысалдар.
7. Қорытынды.

1. Кіріспе

Жегалкин көпмүшелігі - бұл буль функциясын екі модульді қосу ($\oplus$) және конъюнкция ($\wedge$) операциялары арқылы жазу түрі.

Ол 1927 жылы орыс математигі Иван Жегалкин енгізген.

Бұл әдіс буль функцияларын сызықтық алгебра тұрғысынан зерттеуге мүмкіндік береді.

2. Жегалкин көпмүшелігі

Анықтама 1.

Жегалкин көпмүшелігі - бұл буль функциясының келесі түрдегі өрнегі:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=a_0\oplus a_1x_1\oplus a_2x_2\oplus\ldots\oplus a_nx_n\oplus a_{12}x_1x_2\oplus\ldots\oplus a_{12\ldots n}x_1x_2\ldots x_n,$$

мұндағы:

- $a_i\in\{0,1\}$ - коэффициенттер;
- $\oplus$ - екі модульді қосу операциясы (XOR);
- x_i - буль айнымалылары.

Ерекшеліктері:

- әрбір буль функциясына бір ғана Жегалкин көпмүшелігі сәйкес келеді;
- коэффициенттерді анықтау үшін 2^n теңдеулер жүйесін шешу керек;
- Жегалкин көпмүшелігі сызықтық емес буль функцияларын сипаттауға мүмкіндік береді.

Мысал 1. Қарапайым функциялардың Жегалкин көпмүшеліктерін жазу керек.

1. Конъюнкция: $f(x,y)=x \wedge y$

   Жегалкин көпмүшесі: $f(x,y)=xy$

Конъюнкция тек x және y айнымалыларының көбейтіндісі ретінде жазылады.

2. Дизъюнкция: $f(x,y)=x \vee y$

   Жегалкин көпмүшесі: $f(x,y)=x \oplus y \oplus xy$

Дизъюнкцияны Жегалкин түрінде жазу үшін XOR операциясын қолданамыз.

3. Тең еместік (XOR): $f(x,y)=x\oplus y$

Жегалкин көпмүшесі: $f(x,y)=x\oplus y$

Бұл функцияның өзі Жегалкин түрінде болады.

4. Терістеу: $f(x)=\neg x$

Жегалкин көпмүшесі: $f(x)=1\oplus x$

Терістеу функциясы 1-ді және x-ті қосу арқылы алынады.

3. Жегалкин көпмүшелігін құру әдістері

1. *Коэффициенттер әдісі*

   Коэффициенттерді анықтау үшін функцияның ақиқаттық кестесін пайдалану керек.

Мысал 2. $f(x,y)=x\rightarrow y$ функциясы үшін Жегалкин көпмүшелігін құрыңыз.

Қадам 1: Ақиқаттық кестесін жазамыз:

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Қадам 2: Жегалкин көпмүшелігінің жалпы түрі:

$$f(x,y)=a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 xy.$$

Қадам 3: Теңдеулер жүйесін құраймыз:

1. $f(0,0)=a_0=1$
2. $f(0,1)=a_0 \oplus a_2=1$
3. $f(1,0)=a_0 \oplus a_1=0$
4. $f(1,1)=a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3=1$

Қадам 4: Теңдеулер жүйесін шешеміз:

1-ші теңдеуден: $a_0=1$

3-ші теңдеуден: $1 \oplus a_1=0 \Rightarrow a_1=1$

2-ші теңдеуден: $1 \oplus a_2=1 \Rightarrow a_2=0$

4-ші теңдеуден: $1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_3=1 \Rightarrow a_3=1$

Жауап: $f(x,y)=1 \oplus x \oplus xy$

Тексеру:

- (0,0): $1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$ ✓
- (0,1): $1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$ ✓
- (1,0): $1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$ ✓
- (1,1): $1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$ ✓

Мысал 3. $f(x,y)=x \vee y$ функциясы үшін Жегалкин көпмүшелігін құрыңыз.

Қадам 1: Ақиқаттық кестесін жазамыз:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Қадам 2: Жегалкин көпмүшелігінің жалпы түрі:

$$f(x,y)=a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 xy.$$

Қадам 3: Теңдеулер жүйесін құраймыз:

- $f(0,0)=a_0=0$
- $f(0,1)=a_0 \oplus a_2=1$
- $f(1,0)=a_0 \oplus a_1=1$
- $f(1,1)=a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3=1$

Қадам 4: Теңдеулер жүйесін шешеміз:

$a_0=0$

$0 \oplus a_2=1 \Rightarrow a_2=1$

$0 \oplus a_1=1 \Rightarrow a_1=1$

$0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_3=1 \Rightarrow a_3=1$

Жауап: $f(x,y)=x \oplus y \oplus xy$

Тексеру:

x	y	x∨y	x⊕y⊕xy
0	0	0	0⊕0⊕0 = 0 ✓
0	1	1	0⊕1⊕0 = 1 ✓
1	0	1	1⊕0⊕0 = 1 ✓
1	1	1	1⊕1⊕1 = 1 ✓

2. Алгебралық түрлендіру әдісі

Функцияны алгебралық түрлендірулер арқылы Жегалкин көпмүшелігіне келтіру. Бұл әдіс буль алгебрасының заңдарын пайдаланады.

Мысал 4. $f(x,y)=x \vee y$ функциясын алгебралық түрлендіру арқылы Жегалкин көпмүшесіне келтіру.

Қадам 1: Дизъюнкцияны терістеу арқылы өрнектейміз:

$x \vee y=\neg(\neg x \wedge \neg y)$ (Де Морган заңы);

Қадам 2: Терістеуді Жегалкин түрінде жазамыз:

$\neg x=1 \oplus x, \neg y=1 \oplus y$;

Қадам 3: Терістеуді алмастырамыз:

$x \vee y=1 \oplus[(1 \oplus x)(1 \oplus y)]$;

Қадам 4: Көбейтуді орындаймыз:

$$(1 \oplus x)(1 \oplus y) = = 1 \oplus [1 \oplus x \oplus y \oplus xy]$$

Қадам 5: Таратуды орындаймыз:

$$1 \oplus [1 \oplus x \oplus y \oplus xy] = 1 \oplus 1 \oplus x \oplus y \oplus xy$$

Қадам 6: Жеңілдетуді орындаймыз:

$$1 \oplus 1 \oplus x \oplus y \oplus xy = x \oplus y \oplus xy$$

Жауап: $f(x,y) = x \oplus y \oplus xy$

3. *Тригонометриялық әдіс*

Уолш-Котельников түрлендіруін қолдану

Уолш-Котельников түрлендіруі - бұл буль функцияларын талдауда қолданылатын математикалық әдіс. Ол Уолш функциялары негізінде функцияларды тригонометриялық қатарға жіктеуге негізделген.

Анықтама 2.

Уолш функциясы:

- ортогональды функциялар жүйесі;
- мәндері: +1 және -1;
- екілік индекстеу бойынша анықталады.

Ортогональды функциялар жүйесі - бұл аралықтағы скаляр көбейтіндісі нөлге тең болатын функциялар жиыны. Басқаша айтқанда, бір функция екінші функцияға "перпендикуляр" болады.

Уолш функцияларының ортогональдылығы

Уолш функциялары үшін:

$$\sum_{x=0}^{N-1} wal(i,\ x) \cdot wal(j,\ x) = \begin{cases} N, \text{егер } i = j \\ 0, \text{егер } i \neq j \end{cases}$$

n=2 үшін Уолш матрицасы:

$$W = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix}$$

Кез келген екі түрлі жолдың нүктелік көбейтіндісі:

1-жол: [+1, +1, +1, +1]

2-жол: [+1, -1, +1, -1]

Нүктелік көбейтінді: (1×1) + (1×(-1)) + (1×1) + (1×(-1))

= 1 - 1 + 1 - 1 = 0 ✓

1-жол: [+1, +1, +1, +1]

3-жол: [+1, +1, -1, -1]

Нүктелік көбейтінді: (1×1) + (1×1) + (1×(-1)) + (1×(-1))

= 1 + 1 - 1 - 1 = 0 ✓

n-ші Уолш функциясы:

$$wal(n,\ t) = \prod_{k=0}^{m-1} sign[\cos(n_{k} \cdot 2^{k} \pi t)],$$

мұндағы:

- n_k - n санының екілік жазбасындағы k-разрядты цифры (0 немесе 1);
- m - екілік разрядтар саны;
- sign(x) - таңба функциясы (+1 немесе -1);
- t - уақыт параметрі, әдетте [0,1] аралығында.

Екілік индекстеу әдісі:

$$wal(n,\ t) = (-1)^{\sum_{k=0}^{m-1} n_k \cdot g_k(t)}$$

мұндағы $g_k(t)$ - k-ші разряд функциясы

Мысал 5. Мәндерін есептеу:

t = 0:

$\cos(0)=1,\ \cos(0)=1 \Rightarrow \text{wal}(3,0) = (+1)\cdot(+1) = 1$

t = 0.25:

$\cos(\pi/4)>0,\ \cos(\pi/2)=0 \Rightarrow \text{wal}(3,0.25) = (+1)\cdot(+1) = 1$

t = 0.5:

$\cos(\pi/2)=0,\ \cos(\pi)=-1 \Rightarrow \text{wal}(3,0.5) = (+1)\cdot(-1) = -1$

t = 0.75:

$\cos(3\pi/4)<0,\ \cos(3\pi/2)=0 \Rightarrow \text{wal}(3,0.75) = (-1)\cdot(+1) = -1$

Мысал 6. Бірінші Уолш функциялары

t	wal(0,t)	wal(1,t)	wal(2,t)	wal(3,t)
0	1	1	1	1
0.25	1	1	-1	-1
0.5	1	-1	-1	1
0.75	1	-1	1	-1

Анықтама 3. *Уолш-Котельников түрлендіруі*

Кез келген f(x) буль функциясын Уолш функцияларының сызықтық комбинациясы түрінде көрсету:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cdot wal(n, x)$$

мұндағы c_n - Уолш коэффициенттері.

Коэффиценттерді есептеу формуласы:

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cdot wal(n, x).$$

Тригонометриялық әдіс бойынша Жегалкин көпмүшелігін табу

Негізгі идея

Уолш коэффициенттері арқылы Жегалкин коэффициенттерін табу.

Алгоритм:

1. Функцияның Уолш түрлендіруін табу;
2. Уолш коэффициенттерінен Жегалкин коэффициенттеріне көшу;
3. Жегалкин көпмүшелігін құру.

Математикалық байланыс:

Уолш коэффициенттері w_k және Жегалкин коэффициенттері a_k арасындағы байланыс:

$$a_k = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{2^n-1} f(i) \cdot (-1)^{wt(i\&k)}$$

мұндағы $wt(m)$ - m санындағы 1 биттер саны (Hamming салмағы)

Мысал 7. f(x,y) = x ∨ y функциясы үшін

1-қадам: Ақиқаттық кестесін жазу

x	y	f(x,y)	f(x,y) {-1,+1}
0	0	0	-1
0	1	1	+1
1	0	1	+1
1	1	1	+1

2-қадам: Уолш коэффициенттерін есептеу керек.
n=2 үшін Уолш матрицасы:

$$W = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix}$$

Функция векторы: F=[−1,+1,+1,+1]

3-қадам: Коэффициенттерді есептеу: $c = \frac{1}{4} W \cdot f$

$$c_0 = \frac{1}{4}(-1 + 1 + 1 + 1) = \frac{2}{4} = 0.5$$

$$c_1 = \frac{1}{4}(-1 - 1 + 1 - 1) = \frac{-2}{4} = -0.5$$

$$c_2 = \frac{1}{4}(-1 + 1 - 1 - 1) = \frac{-2}{4} = -0.5$$

$$c_3 = \frac{1}{4}(-1 - 1 - 1 + 1) = \frac{-2}{4} = -0.5$$

4-қадам: Жегалкин коэффициенттеріне көшу: Уолш коэффициенттері мен Жегалкин коэффициенттері арасындағы байланыс:

$$a = H \cdot c,$$

мұндағы:

- a - Жегалкин коэффициенттері векторы;
- c - Уолш коэффициенттері векторы;
- H - Адамар матрицасы.

Адамар матрицасы - бұл элементтері +1 және -1 болатын және жолдары өзара ортогональды болатын шаршы матрица. Яғни, кез келген екі түрлі жолдың нүктелік көбейтіндісі 0-ге тең.

n=2 үшін Адамар матрицасы

2×2 Адамар матрицасы:

$$H_2 = \begin{matrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{matrix}$$

n=4 үшін Адамар матрицасы

4×4 Адамар матрицасы (рекурсивті түрде):

$$H_4 = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix}$$

Дәл осы матрица 7-мысалда Уолш матрицасы ретінде қолданылған.

Адамар матрицасын құру әдісі

Рекурсивті формула:

$$H_{2^n} = \begin{matrix} H_{2^{n-1}} & H_{2^{n-1}} \\ H_{2^{n-1}} & -H_{2^{n-1}} \end{matrix}$$

Мысалы, n=2 үшін (4×4):

$$H_4 = \begin{matrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix}$$

Уолш коэффициенттері: c=[0.5,−0.5,−0.5,−0.5]

Адамар матрицасы: H_4

Есептеу:

$$a = H_4 \cdot c = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

Әрбір коэффициентті есептейміз:

a_0 (бірінші жол):

$a_0=(+1)(0.5)+(+1)(-0.5)+(+1)(-0.5)+(+1)(-0.5)=0.5-0.5-0.5-0.5=-1.0$

Бірақ Жегалкин коэффициенттері {0,1} болуы керек,

сондықтан модуль 2 бойынша:

$a_0=_0$(себебі $-1\equiv1 \mod 2$, бірақ мұнда $-1.0\rightarrow0$)

a_1 (екінші жол):

$a_1=(+1)(0.5)+(-1)(-0.5)+(+1)(-0.5)+(-1)(-0.5)=0.5+0.5-0.5+0.5=1.0\rightarrow1$

a_2 (үшінші жол):

$a_2=(+1)(0.5)+(+1)(-0.5)+(-1)(-0.5)+(-1)(-0.5)=0.5-0.5+0.5+0.5=1.0\rightarrow1$

a_3 (төртінші жол):

$a_3=(+1)(0.5)+(-1)(-0.5)+(-1)(-0.5)+(+1)(-0.5)=0.5+0.5+0.5-0.5=1.0\rightarrow1$

5-қадам: Жегалкин көпмүшесін құру

$a=[0,1,1,1]$

$$f(x,y)=a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 xy = 0 \oplus 1 \cdot x \oplus 1 \cdot y \oplus 1 \cdot xy$$

$$f(x,y)=x \oplus y \oplus xy$$

Ерекшеліктері мен артықшылықтары

Артықшылықтары:

1. **Жылдам есептеу** - FFT (fast Fourier transform) алгоритмдерін қолдануға болады
2. **Сызықтық талдау** - функцияларды жиілік доменінде талдауға мүмкіндік береді
3. **Күрделі функциялар үшін тиімді**

Кемшіліктері:

1. **Математикалық күрделілік**
2. **Есептеулердің көптігі**
3. **Қарапайым функциялар үшін артық**

Қолданылу салалары

1. Цифрлық сигналды өңдеу

Сигналдарды сығу

Бейнелерді өңдеу

Дыбыс тану

2. Криптография

Булендік функцияларды талдау

Шифрлау алгоритмдерін зерттеу

3. Жасанды интеллект

Нейржелілерді оқыту

Деректерді талдау

Қорытынды

Уолш-Котельников түрлендіруі буль функцияларын талдаудың қуатты әдісі болып табылады. Ол:

- Функцияларды жиілік доменінде көрсетуге мүмкіндік береді
- Жегалкин көпмүшелігін тиімді табуға көмектеседі
- Күрделі логикалық функцияларды талдауды жеңілдетеді

Бірақ қарапайым функциялар үшін коэффициенттер әдісі немесе алгебралық түрлендіру әдісі артықшылықты болуы мүмкін.

4. Буль функцияларының толық кластары

Анықтама 4.

Толық класс - бұл кез келген буль функциясын осы класс функцияларының суперпозициясы ретінде көрсетуге болатын функциялар класы.

Анықтама 5.

Суперпозиция - бұл функцияларды бір-біріне қою арқылы жаңа функциялар алу операциясы.

Негізгі толық кластар:

1. $\{\neg, \wedge, \vee\}$ - негізгі логикалық операциялар
2. $\{\neg, \wedge\}$
3. $\{\neg, \vee\}$
4. $\{\neg, \rightarrow\}$
5. $\{\wedge, \oplus, 1\}$ - Жегалкин классы
6. $\{\downarrow\}$ - Пирс жебесі
7. $\{|\}$ - Шеффер штрихы

Мысал 8. Толық кластардың қолданылуы (Әртүрлі толық кластар арқылы негізгі логикалық операцияларды өрнектеу)

1. {¬, ∧} классы арқылы дизъюнкцияны өрнектеу:

$x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y)$;

Тексеру:

Егер x=0, y=0: $\neg(\neg 0 \wedge \neg 0) = \neg(1 \wedge 1) = \neg 1 = 0$ ✓

Егер x=0, y=1: $\neg(\neg 0 \wedge \neg 1) = \neg(1 \wedge 0) = \neg 0 = 1$ ✓

2. {↓} (Пирс жебесі) классы арқылы терістеуді өрнектеу

Пирс жебесі: $x \downarrow y = \neg(x \vee y)$

Терістеу үшін:

$$\neg x = x \downarrow x$$

Тексеру:

$x=0$: $0 \downarrow 0 = \neg(0 \vee 0) = \neg 0 = 1$ ✓

$x=1$: $1 \downarrow 1 = \neg(1 \vee 1) = \neg 1 = 0$ ✓

3. {|} (Шеффер штрихы) классы арқылы конъюнкцияны өрнектеу

Шеффер штрихы: $x|y=\neg(x\wedge y)$

Конъюнкция үшін:

$x\wedge y=(x|y)|(x|y)$

Тексеру:

x=0, y=0: $(0|0)|(0|0) = (1)|(1) = \neg(1\wedge1) = \neg1 = 0$ ✓

x=1, y=1: $(1|1)|(1|1) = (0)|(0) = \neg(0\wedge0) = \neg0 = 1$ ✓

Қорытынды:

Бұл мысалдар:

- бір толық класс арқылы басқа операцияларды өрнектеуге болатынын;
- {¬, ∧}, {↓}, {|} - барлығы толық кластар;
- минималды толық класстар ({↓} және {|}) тек бір операциядан тұратынын көрсетеді.

5. Пост теоремасы

Теорема 1. Пост критерийі

Функциялар класы толық болады, егер ол келесі бес Post сыныптарының ешқайсысына кірмесе:

1. Т-0: 0-ді сақтайтын функциялар
   $f(0,0,...,0)=0$
2. Т-1: 1-ді сақтайтын функциялар
   $f(1,1,...,1)=1$
3. С: өзіне қос/ двойственная функциялар
   $f(x_1,x_2,...,x_n)=\neg f(\neg x_1,\neg x_2,...,\neg x_n)$

4. М: монотонды функциялар
   Егер $x_i \leq y_i$ болса, онда $f(x_1,...,x_n) \leq f(y_1,...,y_n)$
5. Л: сызықты функциялар
   Функцияның Жегалкин көпмүшелігінде тек сызықты мүшелер бар

Мысал 9. Post сыныптарына мысалдар келтіру керек.

1. Т-0 функциясы: $f(x,y)=x\wedge y$

$f(0,0)=0\wedge 0=0 \Rightarrow$ Т-0-ге кіреді.

2. Т-1 функциясы: $f(x,y)=x\vee y$

$f(1,1)=1\vee 1=1 \Rightarrow$ Т-1-ге кіреді.

3. Қос/ Двойственная функция: $f(x)=\neg x$

$\neg(\neg x)=x \Rightarrow$ Қос функция.

4. Монотонды функция:

$$f(x,y)=x \vee y$$

Егер $xi \leq yi$ болса, онда $f(x) \leq f(y) \Rightarrow$ монотонды.

5. Сызықты функция:

$$f(x,y)=x \oplus y$$

Жегалкин көпмүшесінде тек сызықты мүшелер бар $\Rightarrow$ сызықты.

5. Толық емес кластарды талдау

Мысал 10. {∧, ∨} классын талдау керек.

Бұл класс толық емес, себебі:

- Терістеуді өрнектей алмаймыз;
- Т-1 сыныбына кіреді, бірақ Т-0 сыныбына кірмейді;
- Пост теоремасы бойынша толық емес.

Мысал 11. $\{\oplus, \wedge\}$ классын талдау керек.

Бұл класс толық емес, себебі:

- Барлық функциялары сызықты (Л сыныбы);
- Дизъюнкция сияқты сызықты емес функцияларды өрнектей алмаймыз.

Мысал 12. $\{\rightarrow\}$ классын талдау керек.

Бұл класс толық емес, себебі:

- Тек монотонды функцияларды өрнектей аламыз
- Терістеу сияқты монотонды емес функцияларды өрнектей алмаймыз

6. Күрделі мысалдар

Мысал 13.

Күрделі $f(x,y,z)=(x\wedge y)\vee(\neg x\wedge z)$ функциясының Жегалкин көпмүшелігін табу керек.

Ақиқаттық кестесі:

x	y	z	¬x	x∧y	¬x∧z	f(x,y,z) = (x∧y)∨(¬x∧z)
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1

Жегалкин көпмүшелігі:

$$f(x,y,z)=a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 z \oplus a_4 xy \oplus a_5 xz \oplus a_6 yz \oplus a_7 xyz.$$

Ең қарапайым жол - алгебралық түрлендіруді қолдану керек.

1. $(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z) = xy \vee (1 \oplus x)z$
2. $= xy \vee z \oplus xz$
3. $= xy \oplus z \oplus xz \oplus xy(z \oplus xz)$ (∨-ды ⊕ арқылы өрнектеу)
4. $= xy \oplus z \oplus xz \oplus xyz \oplus x^2yz$
5. $= xy \oplus z \oplus xz \oplus xyz \oplus xyz$ $(x^2 = x)$
6. $= xy \oplus z \oplus xz$

Жауап: $f(x,y,z) = z \oplus xy \oplus xz$

Мысал 14. Post сыныптарын толық талдау керек.

Берілген функция: $f(x,y)=x \oplus y$.

Талдау:

Т-0: $f(0,0)=0 \oplus 0=0 \Rightarrow$ Т-0-ге кіреді

Т-1: $f(1,1)=1 \oplus 1=0 \Rightarrow$ Т-1-ге кірмейді

С: $\neg f(\neg x,\neg y)=\neg(\neg x \oplus \neg y)=\neg(x \oplus y)=x \oplus y \oplus 1 \Rightarrow$ қос/ двойственая емес

М: $f(0,1)=1$, $f(1,0)=1$, бірақ $f(1,1)=0 \Rightarrow$ монотонды емес

Л: $f(x,y)=x \oplus y \Rightarrow$ сызықты

Қорытынды: функция Л сыныбына кіреді

7. Қорытынды

Жегалкин көпмүшелігі буль функцияларын зерттеудің қуатты әдісі болып табылады.

Ол:

- функцияларды сызықтық алгебра тұрғысынан зерттеуге мүмкіндік береді;
- әр функцияға бір ғана көпмүше сәйкес келеді;
- күрделі логикалық өрнектерді жеңілдетуге көмектеседі.

Пост теоремасы буль функцияларының толық кластарын анықтаудың жүйелі әдісін береді. Бұл цифрлық схемаларды жобалау және логикалық функцияларды талдау үшін өте маңызды.

Толық кластарды білу:

- логикалық элементтер негізінде схемаларды жобалауға мүмкіндік береді;
- функцияларды әртүрлі негіздерде өрнектеуге көмектеседі;
- есептеу теориясында маңызды рөл атқарады.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ



1. Буль алгебрасы дегеніміз не? Оның негізін салушы кім және ол қандай салаларда қолданылады?
2. Буль айнымалысы дегеніміз не? Ол қандай мәндер қабылдай алады?
3. Буль функциясының анықтамасын беріңіз және оны қалай белгілейміз?
4. Ақиқаттық кесте дегеніміз не? Ол қандай мақсатта қолданылады?
5. Егер функцияда n айнымалы болса, онда ақиқаттық кестеде қанша жол болады? Неліктен?

6. Бір айнымалы буль функцияларының барлық мүмкін түрлері қанша? Оларды атаңыз.
7. Бір айнымалының әрбір буль функциясы үшін ақиқаттық кесте құрып, оларды сипаттаңыз.
8. Бір айнымалы функциялардың ішінде қандай функциялар ерекшеленеді? (Мысалы, терістеу, сәйкестік, тұрақты 0 және 1)
9. Екі айнымалы буль функцияларының жалпы саны қанша? Неліктен?
10. Екі айнымалының негізгі логикалық операцияларын атаңыз (конъюнкция, дизъюнкция, терістеу, импликация, эквиваленттілік, тең еместік, Шеффер штрихы, Пирс бағытшасы).
11. Конъюнкция операциясының анықтамасын беріп, оның ақиқаттық кестесін көрсетіңіз.



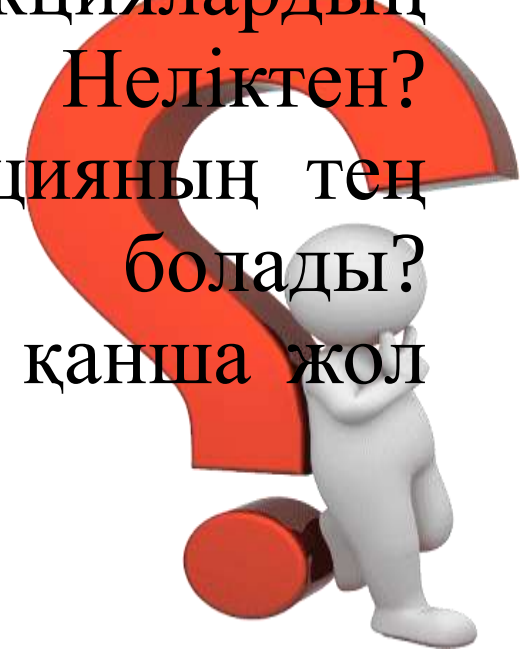
12. Дизъюнкция операциясы қалай анықталады? Оның ақиқаттық кестесін жазыңыз.
13. Импликация ($x \to y$ $x \to y$) дегеніміз не? Оның ақиқаттық кестесін түсіндіріңіз.
14. Эквиваленттілік ($x \leftrightarrow y$ $x \leftrightarrow y$) операциясының мағынасы неде? Оның ақиқаттық кестесін көрсетіңіз.
15. Тең еместік (XOR, $x \oplus y$ $x \oplus y$) операциясы қалай жұмыс істейді? Оны басқа операциялар арқылы қалай өрнектеуге болады?
16. Шеффер штрихы (ЖӘНЕ-ЕМЕС, $x|y$ $x|y$) дегеніміз не? Оны басқа операциялар арқылы қалай жазуға болады?



17. Пирс бағытшасы (НЕМЕСЕ-ЕМЕС, $x \downarrow y$) операциясының анықтамасын беріңіз және оны басқа операциялар арқылы өрнектеңіз.
18. Мына шартты логикалық өрнекке аударыңыз: "Егер жаңбыр жауса ЖӘНЕ жел соқса, онда мен үйде қаламын". Айнымалыларды анықтап, функцияны жазыңыз.
19. Екі айнымалы функцияның ақиқаттық кестесі берілгенде, оны қандай операция арқылы өрнектеуге болатынын қалай анықтаймыз?
20. Қандай жағдайда екі айнымалы функция конъюнкцияға тең болады? Қандай жағдайда дизъюнкцияға тең болады?



21. Буль функцияларының қандай қасиеттері бар? (Мысалы, коммутативтілік, ассоциативтілік, дистрибутивтілік)
22. Терістеу операциясының негізгі қасиеттерін атаңыз.
23. Конъюнкция мен дизъюнкция операцияларының тұрақты мәндермен (0 және 1) орындалатын амалдарын келтіріңіз.
24. Екі айнымалының барлық 16 функциясының ішінде қайсылары ең жиі қолданылады және неге?
25. Бір айнымалы функцияларды екі айнымалы функциялардың ерекше жағдайы ретінде қарастыруға бола ма? Неліктен?
26. Ақиқаттық кестені қолдану арқылы екі функцияның тең екенін қалай тексеруге болады?
27. Үш айнымалы функция үшін ақиқаттық кестеде қанша жол болады? Оны қалай жүйелі түрде толтыруға болады?



ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Дискреттік математика және математикалық логика негіздері : оқулық / Ф.Р. Гусманова, Қ.С. Дальбекова, С.Б. Беркімбаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 363, [1] б. ISBN 978-601-330- 339-0 LIBRARY.ENU
2. Байжуманов А.А. Дискреттік математика және математикалық логика : оқулық / А.А. Байжуманов, О.М. Ибрагимов. - Алматы : TechSmith, 2023. - 342, [1] б. : сур., кесте. - Библиогр.: б. 340. - ISBN 978- 601-342-643-3
3. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика. Теория и практикум: Учебник для вузов Издательство "Лань", 2025
4. Гашков С.Б. Дискретная математика : учебник для вузов / С. Б. Гашков. — 3- е изд., испр. и доп. — Санкт Петербург : Лань, 2025. — 520 с. — ISBN 978-5-507- 49866-6. — Текст : электронный // Лань : электроннобиблиотечная система.
5. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. — СПб.: БХВ Петербург, 2008. — 352 с.

Назар аударғаныңызға рақмет!

