Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дәрістік сабақ 7

Буль функцияларының суперпозициясы ұғымы. Буль функцияларының теңдігі және эквиваленттігі. Негізгі тепе-теңдіктер

ДӘРІСТІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. Кіріспе
2. Буль функцияларының суперпозициясы
1. Буль функцияларының теңдігі және эквиваленттігі
1. Негізгі тепе-теңдіктер
2. Мысалдар

1. Кіріспе

Буль функцияларының суперпозициясы - бұл күрделі буль функцияларын қарапайым функциялардан құрастыру процесі. Бұл ұғым цифрлық схемаларды жобалау және логикалық функцияларды жеңілдету үшін өте маңызды.

2. Буль функцияларының суперпозициясы

Анықтама 1.

Суперпозиция - бұл буль функцияларын басқа буль функцияларына ауыстыру арқылы жаңа буль функцияларын алу операциясы.

Егер $f(x_1,x_2,...,x_n)$ және $g_1,g_2,...,g_n$ буль функциялары болса, онда олардың суперпозициясы:

$h(x_1,x_2,...,x_m)=f(g_1(x_1,...,x_m), g_2(x_1,...,x_m),...,g_n(x_1,...,x_m))$

Мысал 1.

$f(x,y)=x \vee y$ және $g(z)=\neg z$ болсын.

Онда

$h(z)=f(g(z),g(z))=\neg z \vee \neg z=\neg z$

Шешімі:

1-қадам: $g(z)$ функциясы

$g(z)=\neg z$ - бұл z айнымалысын терістеу (инверсия) операциясы

2-қадам: Суперпозицияны құру

$h(z)=f(g(z),g(z))$ дегеніміз:

- f функциясының бірінші аргументі ретінде $g(z)$ қоямыз;
- f функциясының екінші аргументі ретінде де $g(z)$ қоямыз, яғни: $h(z)=f(\neg z,\neg z)$

3-қадам: *f* функциясын есептеу

$f(x,y)=x \vee y$ болғандықтан:

$$h(z)=\neg z \vee \neg z$$

4-қадам: Жеңілдету

$\neg z \vee \neg z$ өрнегінде бірдей екі мүше бар.

Идемпотенттілік заңы бойынша:

$$A \vee A = A$$

Мұнда $A=\neg z$, сондықтан:

$$\neg z \vee \neg z = \neg z$$

Оны Ақиқаттық кестемен тексеріп көріңіздер!!!

Ақиқаттық кестесімен тексеру:

z	g(z) = ¬z	h(z) = ¬z ∨ ¬z	Жеңілдетілген h(z) = ¬z
0	1	1 ∨ 1 = 1	1
1	0	0 ∨ 0 = 0	0

Кестеден көрініп тұрғандай, барлық z мәндері үшін:

$h(z)=\neg z \vee \neg z$ және $h(z)=\neg z$

өрнектерінің мәндері бірдей.

Буль функцияларының суперпозициясы кезінде:

- Функцияларды бір-біріне ауыстырамыз;
- Алынған өрнекті буль алгебрасының заңдарымен жеңілдете аламыз.

Бұл жағдайда идемпотенттілік заңы арқылы өрнек жеңілдеді

Суперпозицияның қасиеттері:

Ассоциативтілік: $f(g(h(x)))=(f\circ g)(h(x))$;

Дистрибутивтілік: кейбір операциялар үшін орындалады;

Коммутативтілік емес: жалпы жағдайда $f(g(x))\neq g(f(x))$.

3. Буль функцияларының теңдігі және эквиваленттігі

Анықтама 2.

Екі буль функциясы $f(x_1,...,x_n)$ және $g(x_1,...,x_n)$ **тең** деп аталады, егер олардың ақиқаттық кестелері бірдей болса:

$$f(x_1,...,x_n)=g(x_1,...,x_n)\Leftrightarrow\forall(x_1,...,x_n)\in B^n: f(x_1,...,x_n)=g(x_1,...,x_n)$$

$\mathbf{B^n}$ деп **n-өлшемді екілік кеңістік** белгіленеді. Бұл:

B = {0, 1} - екілік сандар жиыны;

$\mathbf{B^n}$ - ұзындығы n болатын барлық мүмкін екілік жиынтықтардың (векторлардың) жиыны.

Мысалдар:

B^2 (n=2):

(0,0)
(0,1)
(1,0)
(1,1)

B^3 (n=3):

(0,0,0)
(0,0,1)
(0,1,0)
(0,1,1)
(1,0,0)
(1,0,1)
(1,1,0)
(1,1,1)

Математикалық түрде:

$B^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \{0,1\}, i=1,...,n\}$

Бұл белгілеу мынаны білдіреді:

B^n - n-өлшемді екілік кеңістік

{ } - жиынтықты белгілейді

$(x_1, x_2, ..., x_n)$ - реттелген n-еселік (кортеж)

| - "солай, бұл" деген шартты білдіреді

$x_i \in \{0,1\}$ - әрбір x_i компоненті {0,1} жиынына тиісті

i = 1,...,n - i индексі 1-ден n-ге дейінгі барлық бүтін сандарды қабылдайды.

Мысалдар:

B^2 үшін:

$B^2=\{(x_1, x_2)|\ x_1 \in \{0,1\}, x_2 \in \{0,1\}\}=\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

B^3 үшін:

$B^3 =\{(x_1, x_2, x_3)|\ x_1\in\{0,1\}, x_2\in\{0,1\}, x_3 \in \{0,1\}\}=$

$= \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$

Элементтер саны: $|B^n| = 2^n$

Буль функциясының анықталу облысы: $f: B^n \rightarrow B$

Сондықтан, $f(x_1,...,x_n) = g(x_1,...,x_n)$ теңдігі **барлық мүмкін екілік кіріс жиынтықтары үшін** екі функцияның мәндері бірдей болуын білдіреді.

Мысал: n=2 болғанда, теңдікті тексеру үшін 4 жиынтықты қарастыру керек:

(0,0)
(0,1)
(1,0)
(1,1)

Анықтама 3.

Екі буль функциясы **эквивалентті** деп аталады, егер олар бірдей логикалық өрнектерді білдіретін болса:

$$f \equiv g.$$

Ескерту

Теңдік пен эквиваленттік ұғымдары арасындағы айырмашылық:

Теңдік - функция мәндерінің сәйкес келуі

Эквиваленттік - логикалық өрнектердің бірдейлігі

4. Негізгі тепе-теңдіктер

1. Коммутативтілік заңдары

$x \vee y = y \vee x$

$x \wedge y = y \wedge x$

$x \oplus y = y \oplus x$

2. Ассоциативтілік заңдары

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$$

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

3. Дистрибутивтілік заңдары

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$x \wedge (y \oplus z) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$$

4. Де Морган заңдары

$$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$$

$$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$$

5. Қос терістеу заңы

$$\neg(\neg x)=x$$

6. Сіңірім заңдары

$$x \vee (x \wedge y) = x$$

$$x \wedge (x \vee y) = x$$

$$x \vee (\neg x \wedge y) = x \vee y$$

$$x \wedge (\neg x \vee y) = x \wedge y$$

7. Идемпотенттілік заңдары

$x \vee x = x$

$x \wedge x = x$

8. Тотығу заңдары

$x \vee \neg x = 1$

$x \wedge \neg x = 0$

9. Тұрақтылармен амалдар

$x \vee 0 = x$

$x \wedge 1 = x$

$x \vee 1 = 1$

$x \wedge 0 = 0$

$x \oplus 0 = x$

$x \oplus 1 = \neg x$

5. Мысалдар

Мысал 1.

$f(x,y,z)=x\wedge(y\vee z)$ және $g(a,b)=\neg a\vee b$ болсын.
Табу керек: $h(x,y,z)=g(f(x,y,z),x)$.

Шешімі:

Алдымен $f(x,y,z)$ функциясын есептейміз:

$$f(x,y,z)=x\wedge(y\vee z)$$

Енді g функциясына $a=f(x,y,z)$ және $b=x$ деп қоямыз:

$$h(x,y,z)=g(f(x,y,z),x)=\neg f(x,y,z)\vee x$$

$f(x,y,z)$ орнына оның мәнін қоямыз:

$$h(x,y,z)=\neg(x\wedge(y\vee z))\vee x$$

- Де Морган;
- ассоциативтілік және коммутативтілік;
- тотығу ;
- тұрақтылармен амал

заңдарын қолданып $h(x,y,z)$ есептелуінің ықшамды жауабын берсеңіздер?

Де Морган заңын қолданамыз:

$$h(x,y,z)=(\neg x \vee \neg(y \vee z)) \vee x$$

Тағы да Де Морган заңын қолданамыз:

$$h(x,y,z)=(\neg x \vee (\neg y \wedge \neg z)) \vee x$$

Ассоциативтілік және коммутативтілік заңдарын қолданамыз:

$$h(x,y,z)=(\neg x \vee x) \vee (\neg y \wedge \neg z)$$

Тотығу заңы бойынша $\neg x \vee x=1$:

$$h(x,y,z)=1 \vee (\neg y \wedge \neg z)$$

Константалармен операция заңы бойынша $1 \vee A=1$:

$$h(x,y,z)=1$$

Мысал 2. Тепе-теңдікті дәлелдеу керек:

$$x \rightarrow y = \neg x \vee y$$

Шешімі: Ақиқаттық кестесі:

x	y	x→y	¬x	¬xvy
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Мысал 3. Де Морган заңын қолдану: $\neg(\neg x \vee y)$

Шешімі:

Де Морган заңын қолданамыз:

$$\neg(\neg x \vee y) = \neg(\neg x) \wedge \neg y$$

Қос терістеу заңын қолданамыз $\neg(\neg x) = x$:

$$\neg(\neg x \vee y) = x \wedge \neg y$$

Мысал 4. Күрделі өрнекті жеңілдету керек:

$x \vee y) \wedge (\neg x \vee y)$

Шешімі:

Дистрибутивтілік заңын қолданамыз:

$$(x \vee y) \wedge (\neg x \vee y) = (x \wedge \neg x) \vee y$$

Тотығу заңы бойынша $x \wedge \neg x = 0$:

$$(x \vee y) \wedge (\neg x \vee y) = 0 \vee y$$

Тұрақтылармен амал заңы бойынша $0 \vee y = y$:

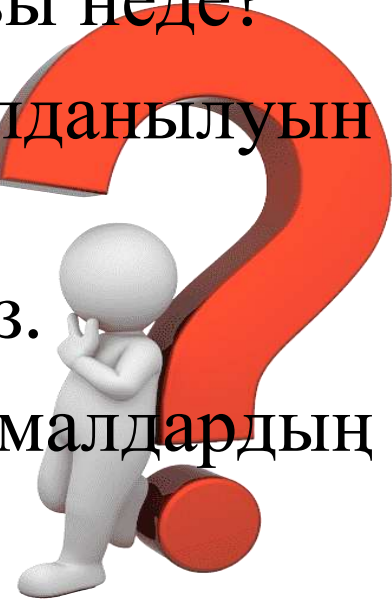
$$(x \vee y) \wedge (\neg x \vee y) = y$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Буль функцияларының суперпозициясы дегеніміз не?
2. Суперпозицияны қалай жасауға болады? Мысал келтіріңіз.
3. Суперпозицияның негізгі қасиеттерін атаңыз.
4. Екі буль функциясының тең болуы қандай шартта анықталады?
5. $f(x_1,\ldots,x_n)=g(x_1,\ldots,x_n)$ теңдігі нені білдіреді?
6. B^n дегеніміз не? Оның элементтер саны қандай?
7. Теңдік пен эквиваленттілік арасындағы айырмашылықты түсіндіріңіз.
8. Екі буль функциясы эквивалентті болса, олардың ақиқаттық кестелері қандай болады?



9. Коммутативтілік заңдарын атаңыз.
10. Ассоциативтілік заңдары қандай буль амалдары үшін орындалады?
11. Дистрибутивтілік заңдарының екі түрін келтіріңіз.
12. Де Морган заңдарын тұжырымдаңыз және олардың маңызын түсіндіріңіз.
13. Қос терістеу заңы қандай?
14. Сіңірім заңдары дегеніміз не? Олардың практикалық маңызы неде?
15. Идемпотенттілік заңдарын атаңыз және олардың қолданылуын түсіндіріңіз.
16. Тотығу заңдары дегеніміз не? Оларды формуламен жазыңыз.
17. Буль алгебрасында тұрақтылармен (0 және 1) амалдардың нәтижелерін келтіріңіз.



18. Буль функциясының анықталу облысы мен мәндер жиыны қандай?

19. Буль функцияларының суперпозициясында коммутативтілік қасиеті орындала ма? Неліктен?

20. Ақиқаттық кестелері бірдей екі функция әрқашан эквивалентті ме?

21. Буль алгебрасының заңдарын қолданудың практикалық маңызы неде? Олар цифрлық схемаларды жобалауда қалай қолданылады?



ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Дискреттік математика және математикалық логика негіздері : оқулық / Ф.Р. Гусманова, Қ.С. Дальбекова, С.Б. Беркімбаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 363, [1] б. ISBN 978-601-330- 339-0 LIBRARY.ENU
2. Байжуманов А.А. Дискреттік математика және математикалық логика : оқулық / А.А. Байжуманов, О.М. Ибрагимов. - Алматы : TechSmith, 2023. - 342, [1] б. : сур., кесте. - Библиогр.: б. 340. - ISBN 978- 601-342-643-3
3. Ерусалимский Я. М. Дискретная математика. Теория и практикум: Учебник для вузов Издательство "Лань", 2025
4. Гашков, С. Б. Дискретная математика : учебник для вузов / С. Б. Гашков. — 3- е изд., испр. и доп. — СанктПетербург : Лань, 2025. — 520 с. — ISBN 978-5-507- 49866-6. — Текст : электронный // Лань : электроннобиблиотечная система.
5. Тишин В. В. Дискретная математика в примерах и задачах. — СПб.: БХВ Петербург, 2008. — 352 с.

Назар аударғаныңызға рақмет!

