Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дәрістік сабақ 8

Буль функцияларының қалыпты формалары. Жетілдірілген дизъюнктивті қалыпты форма (ЖДҚФ) және жетілдірілген конъюнктивті қалыпты форма (ЖКҚФ)

ДӘРІСТІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. Кіріспе
2. Негізгі ұғымдар
3. Элементар конъюнкция және дизъюнкция
4. Дизъюнктивті қалыпты форма (ДҚФ)
5. Конъюнктивті қалыпты форма (КҚФ)
6. Жетілдірілген ДҚФ (ЖДҚФ)
7. Жетілдірілген КҚФ (ЖКҚФ)
8. Мысалдар

1. Кіріспе

Буль функцияларының қалыпты формалары - бұл буль функцияларын стандартты түрде жазу әдістері. Олар цифрлық схемаларды жобалау, логикалық функцияларды жеңілдету және талдау үшін қолданылады.

2. Негізгі ұғымдар

Анықтама 1.

Буль функциясы - f: $B^n \to B$ түріндегі функция, мұндағы $B=\{0,1\}$.

Анықтама 2.

Айнымалының литералы - бұл айнымалы немесе оның терістеуі:

x - тікелей литерал;

$\neg x$ - терістеу литералы.

3. Элементар конъюнкция және дизъюнкция

Анықтама 3.

Элементар конъюнкция - әртүрлі айнымалылардың конъюнкциясы:

$$K = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n,$$

мұндағы әрбір x_i - a_i немесе $\neg a_i$ түрінде беріледі.

Анықтама 4.

Элементар дизъюнкция (макстерм) - әртүрлі айнымалылардың дизъюнкциясы:

$$D=x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$$

мұндағы әрбір x_i -a_i немесе $\neg a_i$ түрінде беріледі.

4. Дизъюнктивті қалыпты форма (ДҚФ)

Анықтама 5.

Дизъюнктивті қалыпты форма (ДҚФ) - элементар конъюнкциялардың дизъюнкциясы:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_m.$$

ДҚФ құру ережесі:

- Ақиқаттық кестеде функция мәні 1-ге тең жолдарды аламыз;
- Әрбір мұндай жол үшін элементар конъюнкция құрамыз;
- Барлық элементар конъюнкцияларды дизъюнкциямен байланыстырамыз.

5. Конъюнктивті қалыпты форма (ККҚФ)

Конъюнктивті қалыпты форма (ККҚФ) - элементар дизъюнкциялардың конъюнкциясы:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_m.$$

ККФ құру ережесі:

- Ақиқаттық кестеде функция мәні 0-ге тең жолдарды аламыз
- Әрбір мұндай жол үшін элементар дизъюнкция құрамыз
- Барлық элементар дизъюнкцияларды конъюнкциямен байланыстырамыз

6. Жетілдірілген дизъюнктивті қалыпты форма (ЖДҚФ)

Анықтама 6.

ЖДҚФ - әрбір элементар конъюнкцияда барлық айнымалылар болуы керек.

ЖДҚФ құру алгоритмі:

1. Ақиқаттық кестеде функция мәні 1-ге тең жолдарды аламыз;
2. Әрбір мұндай жол үшін:
   - Айнымалы мәні 1 болса, оны тікелей жазамыз;
   - Айнымалы мәні 0 болса, оны терістеумен жазамыз.
3. Барлық элементар конъюнкцияларды дизъюнкциямен байланыстырамыз.

7. Жетілдірілген КҚФ (ЖККҚФ)

Анықтама 6.

ЖККҚФ - әрбір элементар дизъюнкцияда барлық айнымалылар болуы керек.

ЖКҚФ құру алгоритмі:

1. Ақиқаттық кестеде функция мәні 0-ге тең жолдарды аламыз;
2. Әрбір мұндай жол үшін:
   - Айнымалы мәні 0 болса, оны тікелей жазамыз;
   - Айнымалы мәні 1 болса, оны терістеумен жазамыз.
3. Барлық элементар дизъюнкцияларды конъюнкциямен байланыстырамыз.

8. Мысалдар

Мысал 1. Ақиқаттық кесте арқылы ЖДҚФ және ЖККҚФ құру керек.

Берілген функцияның ақиқаттық кестесі:

№	x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

Шешімі:

ЖДҚФ құру:

f=1 болатын жолдар: 1, 3, 4, 6

Әр жол үшін элементар конъюнкция:

№1: (0,0,1) → ¬x ∧ ¬y ∧ z

№3: (0,1,1) → ¬x ∧ y ∧ z

№4: (1,0,0) → x ∧ ¬y ∧ ¬z

№6: (1,1,0) → x ∧ y ∧ ¬z

ЖДҚФ:

f(x,y,z) = (¬x ∧ ¬y ∧ z) ∨ (¬x ∧ y ∧ z) ∨ (x ∧ ¬y ∧ ¬z) ∨ (x ∧ y ∧ ¬z)

ЖКҚФ құру:

f=0 болатын жолдар: 0, 2, 5, 7

Әр жол үшін элементар дизъюнкция:

№0: (0,0,0) → x ∨ y ∨ z

№2: (0,1,0) → x ∨ ¬y ∨ z

№5: (1,0,1) → ¬x ∨ y ∨ ¬z

№7: (1,1,1) → ¬x ∨ ¬y ∨ ¬z

ЖКҚФ:

$f(x,y,z) = (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$

Мысал 2.

Функцияны ЖДҚФ түрінде жазу керек.

Берілгені: $f(x,y) = x \rightarrow y$

Берілген функцияның ақиқаттық кестесі:

x	y	x→y
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

ЖДҚФ құру:

1. f=1 болатын жолдар: (0,0), (0,1), (1,1)
2. Элементар конъюнкциялар:
   - (0,0) → ¬x ∧ ¬y
   - (0,1) → ¬x ∧ y
   - (1,1) → x ∧ y
3. ЖДҚФ: f(x,y) = (¬x ∧ ¬y) ∨ (¬x ∧ y) ∨ (x ∧ y)

Мысал 3.

Функцияны ЖКҚФ түрінде жазу керек.

Берілгені: $f(x,y) = x \oplus y$.

Шешімі: Ақиқаттық кестесі:

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ЖКҚФ құру:

1. f=0 болатын жолдар: (0,0), (1,1)
2. Элементар дизъюнкциялар:
   - $(0,0) \rightarrow x \vee y$
   - $(1,1) \rightarrow \neg x \vee \neg y$
3. ЖКҚФ: $f(x,y) = (x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$

Мысал 4. ЖДҚФ-тен функцияны қалпына келтіру.

Берілген ЖДҚФ:

$$f(x,y,z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z).$$

Шешімі:

Функцияны анықтау:

1. Бірінші конъюнкция: x=1, y=1, z=1 → f=1
2. Екінші конъюнкция: x=0, y=1, z=0 → f=1
3. Үшінші конъюнкция: x=1, y=0, z=1 → f=1
4. Қалған жиынтықтарда f=0.

Мысал 5. ЖКҚФ-тен функцияны қалпына келтіру

Берілген ЖКҚФ:

$$f(x,y) = (x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y).$$

Шешімі:

Функцияны анықтау:

1. Бірінші дизъюнкция: x=0 және y=0 болғанда 0 болады
2. Екінші дизъюнкция: x=1 және y=1 болғанда 0 болады
3. Функция: $f(x,y) = x \oplus y$ (тең еместік)

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Буль функциясы дегеніміз не? Оның анықталу облысы мен мәндер жиыны қандай?
2. Айнымалының литерлы дегеніміз не? Тікелей литерл мен терістеу литерлы арасындағы айырмашылықты анықтаңыз.
3. Элементар конъюнкция (минтерм) дегеніміз не? Оның құрылымы қалай болады?
4. Элементар дизъюнкция (макстерм) дегеніміз не? Минтерм мен макстерм арасындағы басты айырмашылық қандай?
5. Элементар конъюнкция мен элементар дизъюнкция қалай қалыптасады? Мысал келтіріңіз.



6. Дизъюнктивті қалыпты форма (ДҚФ) дегеніміз не? Оның жалпы түрін жазыңыз.
7. ДҚФ-ны ақиқаттық кесте бойынша қалай құруға болады? Алгоритмін түсіндіріңіз.
8. ДҚФ-ның артықшылықтары мен шектеулері неде?
9. Конъюнктивті қалыпты форма (ККФ) дегеніміз не? Оның жалпы түрін көрсетіңіз.
10. ККФ-ны ақиқаттық кесте арқылы қалай алуға болады? Алгоритмін түсіндіріңіз.
11. ДҚФ және ККФ арасындағы негізгі айырмашылық қандай?



12. Жетілдірілген дизъюнктивті қалыпты форма (ЖДҚФ) дегеніміз не?
13. ЖДҚФ құру алгоритмін қадамдармен түсіндіріңіз.
14. ЖДҚФ-дағы әрбір элементар конъюнкцияда барлық айнымалылар болуы не үшін қажет?
15. Мысал арқылы ЖДҚФ құруды көрсетіңіз.
16. Жетілдірілген конъюнктивті қалыпты форма (ЖККФ) дегеніміз не?
17. ЖККФ құру алгоритмін қадамдармен сипаттаңыз.
18. ЖККФ-тағы әрбір элементар дизъюнкцияда барлық айнымалылар қатысуы не үшін маңызды?
19. Мысал арқылы ЖККФ құруды түсіндіріңіз.



20. ЖДҚФ пен ЖККҚФ арасындағы негізгі айырмашылық қандай?

21. Бір функцияның ЖДҚФ-сын және ЖККҚФ-сын қалай салыстыруға болады?

22. Функцияның ЖДҚФ-ы мен ЖККҚФ-ы бір мезгілде қысқа бола ала ма? Неліктен?

23. Берілген ЖДҚФ бойынша функцияны қалай қалпына келтіруге болады? Мысал келтіріңіз.

24. Берілген ЖККҚФ бойынша функцияны қалай анықтауға болады? Мысал арқылы түсіндіріңіз.

25. Қандай жағдайларда ЖДҚФ пайдалы, ал қандай жағдайларда ЖККҚФ тиімдірек болады?



20. ЖДҚФ пен ЖККҚФ арасындағы негізгі айырмашылық қандай?

21. Бір функцияның ЖДҚФ-сын және ЖККҚФ-сын қалай салыстыруға болады?

22. Функцияның ЖДҚФ-ы мен ЖККҚФ-ы бір мезгілде қысқа бола ала ма? Неліктен?

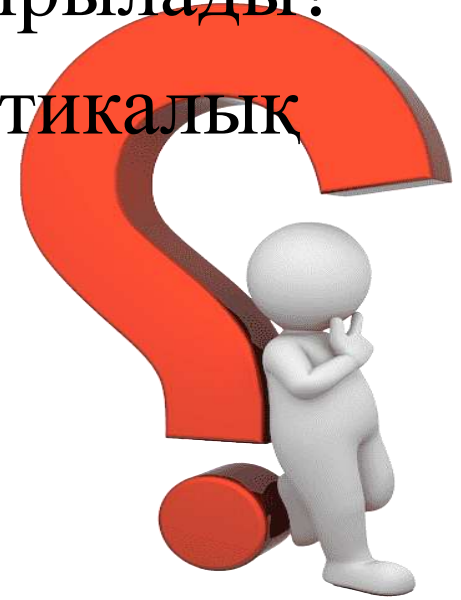
23. Берілген ЖДҚФ бойынша функцияны қалай қалпына келтіруге болады? Мысал келтіріңіз.

24. Берілген ЖККҚФ бойынша функцияны қалай анықтауға болады? Мысал арқылы түсіндіріңіз.

25. Қандай жағдайларда ЖДҚФ пайдалы, ал қандай жағдайларда ЖККҚФ тиімдірек болады?



26. ЖДҚФ пен ЖККҚФ цифрлық схемаларды жобалауда қалай қолданылады?
27. Қалыпты формаларды жеңілдету әдістері қандай? Олардың маңызы неде?
28. Барлық буль функцияларын ЖДҚФ және ЖККҚФ түрінде жазуға бола ма? Неліктен?
29. ЖДҚФ пен ЖККҚФ арасында өту қалай жүзеге асырылады?
30. ЖДҚФ және ЖККҚФ ұғымдарын қолданудың практикалық маңызы туралы айтыңыз.



ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Дискреттік математика және математикалық логика негіздері : оқулық / Ф.Р. Гусманова, Қ.С. Дальбекова, С.Б. Беркімбаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 363, [1] б. ISBN 978-601-330- 339-0 LIBRARY.ENU
2. Байжуманов А.А. Дискреттік математика және математикалық логика : оқулық / А.А. Байжуманов, О.М. Ибрагимов. - Алматы : TechSmith, 2023. - 342, [1] б. : сур., кесте. - Библиогр.: б. 340. - ISBN 978- 601-342-643-3
3. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика. Теория и практикум: Учебник для вузов Издательство "Лань", 2025
4. Гашков С.Б. Дискретная математика : учебник для вузов / С. Б. Гашков. — 3- е изд., испр. и доп. — Санкт Петербург : Лань, 2025. — 520 с. — ISBN 978-5-507- 49866-6. — Текст : электронный // Лань : электроннобиблиотечная система.
5. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. — СПб.: БХВ Петербург, 2008. — 352 с.

Назар аударғаныңызға рақмет!

