Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дәрістік сабақ 6

Буль функциялары. Буль функцияларының ақиқаттық кестесі. Бір және екі айнымалы буль функциялары

ДӘРІСТІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. Кіріспе
2. Негізгі ұғымдар
3. Бір айнымалы буль функциялары
4. Екі айнымалы буль функциялары
5. Буль функцияларының қасиеттері

1. Кіріспе

Буль алгебрасы - бұл логикалық операцияларды зерттейтін математиканың бір саласы.

Ол *ағылшын математигі Джордж Буль* (1815-1864) есімімен аталған.

Буль алгебрасы компьютерлік ғылым, цифрлық схемалар, бағдарламалау және жасанды интеллект саласында кеңінен қолданылады.

2. Негізгі ұғымдар

Буль айнымалысы

Буль айнымалысы - тек екі мән қабылдай алатын айнымалы:

0 (жалған, false)

1 (ақиқат, true)

Белгіленуі: x, y, z, A, B, C, т.б.

Буль функциясы

Буль функциясы - буль айнымалыларынан тұратын және буль мәнін (0 немесе 1) қайтаратын функция.

Белгіленуі: $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

Ақиқаттық кесте

Ақиқаттық кесте - барлық мүмкін айнымалы мәндер үшін функция мәнін көрсететін кесте.

n айнымалысы бар функция үшін ақиқаттық кестеде 2^n жол болады.

Мысал 1: 2 айнымалы үшін $2^2=4$ жол

3. Бір айнымалы буль функциялары

Бір айнымалы буль функциясы үшін $2^2=4$ түрлі функция бар:

1. Тұрақты нөл функциясы: f(x) = 0

x	f(x)
0	0
1	0

2. Сәйкестік функциясы: f(x) = x

x	f(x)
0	0
1	1

3. Инверсия функциясы (терістеу): f(x) = ¬x

x	f(x)
0	1
1	0

4. Тұрақты бір функциясы: f(x) = 1

x	f(x)
0	1
1	1

4. Екі айнымалы буль функциялары

Екі айнымалы буль функциясы үшін 16 түрлі функция бар:

Негізгі логикалық операциялар:

1. Конъюнкция (ЖӘНЕ, AND): f(x,y) = x Λ y және $x \& y.$

0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2. Дизъюнкция (НЕМЕСЕ, OR): f(x,y) = x ∨ y

x	y	x ∨ y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3. Терістеу (ЕМЕС, NOT): f(x) = ¬x

x	¬x
0	1
1	0

4. Импликация (ЕГЕР...ОНДА): f(x,y) = x → y

x	y	x → y
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

5. Эквиваленттік (ТЕҢ): f(x,y) = x ↔ y

x	y	x ↔ y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

6. Ерекше НЕМЕСЕ/Исключающее ИЛИ (XOR):

$f(x,y) = x \oplus y$

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

7. Шеффер штрихы (ЖӘНЕ-ЕМЕС): f(x,y)=x|y

x	y	x
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

8. Пирс бағытшасы/ Стрелка Пирса (НЕМЕСЕ-ЕМЕС): f(x,y) = x ↓ y

x	y	x ↓ y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

5. Буль функцияларының қасиеттері

Коммутативтілік (ауыстырымдылық)

- $x \wedge y = y \wedge x$
- $x \vee y = y \vee x$

Ассоциативтілік (терімділік)

- $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
- $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

Дистрибутивтілік (үлестірімділік)

- $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
- $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Де Морган заңдары

- $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$
- $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$

Қос терістеу заңы

- $\neg(\neg x) = x$

Мысал 2:

f(x,y) = x ∧ ¬y функциясының ақиқаттық кестесін құрыңыз.

x	y
0	0
0	1
1	0
1	1

Шешімі:

x	y	¬y	x ∧ ¬y
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

Мысал 3:

f(x,y,z) = (x ∨ y) ∧ ¬z функциясының ақиқаттық кестесін құрыңыз.

x	y	z
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Шешімі:

x	y	z	x ∨ y	¬z	(x ∨ y) ∧ ¬z
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Мысал 4:

f(x,y) = x → y

функциясын жеңілдетуді дәлелдеу керек:

x → y = ¬x V y.

x	y
0	0
0	1
1	0
1	1

Шешімі:

x	y	$x \rightarrow y$	$\neg x$	$\neg x \vee y$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Мысал 5:

f(x,y) = x ⊕ y функциясын жеңілдетуді дәлелдеу керек:

x ⊕ y = (x ∧ ¬y) ∨ (¬x ∧ y).

(жеке тапсырма)

x	y
0	0
0	1
1	0
1	1

Мысал 6:

Шарт: "Егер жаңбыр жауса ЖӘНЕ жел соқса, онда мен үйде қаламын"

Айнымалылар:

A: жаңбыр жауады (1 - иә, 0 - жоқ)

B: жел соғады (1 - иә, 0 - жоқ)

C: үйде қаламын (1 - иә, 0 - жоқ)

Шешімі:

Функция: $C = A \wedge B$

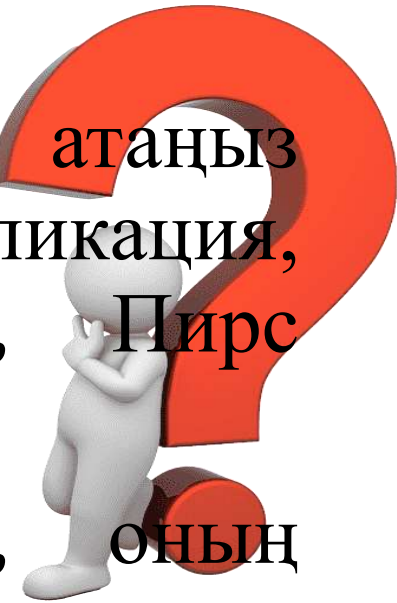
A	B	$C = A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Буль алгебрасы дегеніміз не? Оның негізін салушы кім және ол қандай салаларда қолданылады?
2. Буль айнымалысы дегеніміз не? Ол қандай мәндер қабылдай алады?
3. Буль функциясының анықтамасын беріңіз және оны қалай белгілейміз?
4. Ақиқаттық кесте дегеніміз не? Ол қандай мақсатта қолданылады?
5. Егер функцияда n айнымалы болса, онда ақиқаттық кестеде қанша жол болады? Неліктен?



6. Бір айнымалы буль функцияларының барлық мүмкін түрлері қанша? Оларды атаңыз.
7. Бір айнымалының әрбір буль функциясы үшін ақиқаттық кесте құрып, оларды сипаттаңыз.
8. Бір айнымалы функциялардың ішінде қандай функциялар ерекшеленеді? (Мысалы, терістеу, сәйкестік, тұрақты 0 және 1).
9. Екі айнымалы буль функцияларының жалпы саны қанша? Неліктен?
10. Екі айнымалының негізгі логикалық операцияларын атаңыз (конъюнкция, дизъюнкция, терістеу, импликация, эквиваленттілік, тең еместік, Шеффер штрихы, Пирс бағытшасы).
11. Конъюнкция операциясының анықтамасын беріп, оның ақиқаттық кестесін көрсетіңіз.



12. Дизъюнкция операциясы қалай анықталады? Оның ақиқаттық кестесін жазыңыз.
13. Импликация ($x \to y$) дегеніміз не? Оның ақиқаттық кестесін түсіндіріңіз.
14. Эквиваленттілік ($x \leftrightarrow y$) операциясының мағынасы неде? Оның ақиқаттық кестесін көрсетіңіз.
15. Тең еместік (XOR, $x \oplus y$) операциясы қалай жұмыс істейді? Оны басқа операциялар арқылы қалай өрнектеуге болады?
16. Шеффер штрихы (ЖӘНЕ-ЕМЕС, $x|y$) дегеніміз не? Оны басқа операциялар арқылы қалай жазуға болады?
17. Пирс бағытшасы (НЕМЕСЕ-ЕМЕС, $x \downarrow y$) операциясының анықтамасын беріңіз және оны басқа операциялар арқылы өрнектеңіз.



18. Мына шартты логикалық өрнекке аударыңыз: "Егер жаңбыр жауса ЖӘНЕ жел соқса, онда мен үйде қаламын". Айнымалыларды анықтап, функцияны жазыңыз.
19. Екі айнымалы функцияның ақиқаттық кестесі берілгенде, оны қандай операция арқылы өрнектеуге болатынын қалай анықтаймыз?
20. Қандай жағдайда екі айнымалы функция конъюнкцияға тең болады? Қандай жағдайда дизъюнкцияға тең болады?
21. Буль функцияларының қандай қасиеттері бар? (Мысалы, коммутативтілік, ассоциативтілік, дистрибутивтілік)
22. Терістеу операциясының негізгі қасиеттерін атаңыз.
23. Конъюнкция мен дизъюнкция операцияларының тұрақты мәндермен (0 және 1) орындалатын амалдарын келтіріңіз.



24. Буль функцияларының қандай қасиеттері бар? (Мысалы, коммутативтілік, ассоциативтілік, дистрибутивтілік)

25. Терістеу операциясының негізгі қасиеттерін атаңыз.

26. Конъюнкция мен дизъюнкция операцияларының тұрақты мәндермен (0 және 1) орындалатын амалдарын келтіріңіз.



27. Екі айнымалының барлық 16 функциясының ішінде қайсылары ең жиі қолданылады және неге?

28. Бір айнымалы функцияларды екі айнымалы функциялардың ерекше жағдайы ретінде қарастыруға бола ма? Неліктен?

29. Ақиқаттық кестені қолдану арқылы екі функцияның тең екенін қалай тексеруге болады?

30. Үш айнымалы функция үшін ақиқаттық кестеде қанша жол болады? Оны қалай жүйелі түрде толтыруға болады?

ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Дискреттік математика және математикалық логика негіздері : оқулық / Ф.Р. Гусманова, Қ.С. Дальбекова, С.Б. Беркімбаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 363, [1] б. ISBN 978-601-330- 339-0 LIBRARY.ENU
2. Байжуманов А.А. Дискреттік математика және математикалық логика : оқулық / А.А. Байжуманов, О.М. Ибрагимов. - Алматы : TechSmith, 2023. - 342, [1] б. : сур., кесте. - Библиогр.: б. 340. - ISBN 978- 601-342-643-3
3. Ерусалимский Я. М. Дискретная математика. Теория и практикум: Учебник для вузов Издательство "Лань", 2025
4. Гашков, С. Б. Дискретная математика : учебник для вузов / С. Б. Гашков. — 3- е изд., испр. и доп. — СанктПетербург : Лань, 2025. — 520 с. — ISBN 978-5-507- 49866-6. — Текст : электронный // Лань : электроннобиблиотечная система.
5. Тишин В. В. Дискретная математика в примерах и задачах. — СПб.: БХВ Петербург, 2008. — 352 с.

Назар аударғаныңызға рақмет!

