Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дәрістік сабақ 5

Рекуренттік қатынастар. Қайтымды тізбектер.

ДӘРІСТІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. Комбинаторика және қолданылуы
2. Комбинаториканың негізгі принциптері.
3. Орналастыру, теру, алмастыру

1. Рекурентті қатынас ұғымы

Анықтама 1. k-шы ретті рекуренттік қатынас деп

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

тізбегінің $a_1, a_2, \ldots, a_k$ алғашқы k мүшесі берілсе, оның кез келген (барлық) мүшесін табуға мүмкіндік беретін

$$a_{n+k}=F(n, a_n a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1})$$

түріндегі қатынасты айтамыз.

Мұндай қатынаспен берілетін тізбек *рекурентті* немесе *қайтымды тізбек* деп аталады.

Мысал 1. $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ тізбегі арифметикалық прогрессия және d оның айырмасы болса, онда

$$a_{n+1}=a_n+d$$

қатынасы, бірінші мүшесі a_1 берілген жағдайда арифметикалық прогрессияның кез келген мүшесін табуға мүмкіндік береді.

Олай болса ол 1–ші ретті $(n+k=n+1 \Rightarrow k=1)$ рекуренттік қатынас болады, яғни арифметикалық прогрессия - рекурентті (қайтымды) тізбек болады.

Сол сияқты $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ тізбегі арифметикалық прогрессия және q оның еселігі болса, онда

$$b_{n+1}=b_n q$$

қатынасы, b_1 бірінші мүшесі берілген жағдайда геометриялық прогрессияның кез келген мүшесін табуға мүмкіндік беретіндіктен, 1 - ретті рекуренттік қатынас болады. Олай болса геометриялық прогрессия - қайтымды (рекурентті) тізбек.

«Рекурентті тізбекті бір ғана рекурентті қатынаспен беріле ме, әлде әртүрлі қатынастармен беруге бола ма?» деген сұрақты қарастырайық.

Сұраққа жауапты мысалмен берейік.

Мысал 2. Арифметикалық прогрессияны беретін

$$a_{n+1}=a_n+d$$

қатынасында n – нің орнына $n+1$ санын алғанда шығатын

$$a_{n+2}=a_{n+1}+d$$

қатынасынан $a_{n+1}=a_n+d$ қатынасын мүшелеп шегерсек прогрессияны беретін екінші ретті

$$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n.$$

Егер a_1, a_2 алғашқы екі мүшесі берілсе, бұл қатынас арифметикалық прогрессияның кез келген (барлық) мүшесін табуға мүмкіндік береді.

Олай болса

$$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$$

қатынасы арифметикалық прогрессияның екінші ретті рекуренттік қатынасы болады.

Осылайша $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$ қатынасын пайдалана отырып, егер a_1, a_2, a_2 алғашқы үш мүшесі берілсе арифметикалық прогрессияның кез келген (барлық) мүшесін табуға мүмкіндік беретін

$$a_{n+3}=3a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n$$

рекуренттік қатынасын алуға болады.

Сонымен біз

$$a_{n+1}=a_n+d,$$

$$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n,$$

$$a_{n+3}=3a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n$$

рекуренттік қатынастарының кез келгені бір арифметикалық прогрессияның (тізбектің) рекуренттік қатынасы болатынын, яғни рекурентті тізбектің әртүрлі қатынастармен берілуі мүмкін екенін көрсеттік.

1. Сызықтық рекуренттік қатынас

Біз сызықтық тұрақты коэффициентті рекуренттік қатынастарды қарастырумен шектелеміз.

Анықтама 2. $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ тізбегі *k – ретті сызықтық тұрақты коэффициентті қайтымды (рекурентті тізбек) тізбек* деп аталады, егер ол

$$a_{n+k} = p_{k-1}a_{n+k-1} + p_{k-2}a_{n+k-2} + \cdots + p_0 a_n + f(n)$$

түріндегі рекуренттік қатынаспен берілсе, мұндағы $p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}$ — *коэффициенттер* деп аталатын тұрақты сандар, $f(n)$ - *натурал аргументті функция.*

Егер $f=0$ болса қатынас *біртекті*, болмаса *біртексіз* деп аталады:

$$a_{n+k} + p_{k-1}a_{n+k-1} + p_{k-2}a_{n+k-2} + \cdots + p_0 a_n = 0$$

k – ретті біртекті сызықтық рекуренттік қатынас.

Мысалы, 1 - мысалда келтірілген

$$a_{n+1}=a_n+d$$

қатынасы бірінші ретті $(k=1, p_0=1)$ *сызықтық біртексіз* $(f(n)=d\neq 0)$ *рекуренттік қатынас* болады да,

$$b_{n+1}=b_n q$$

қатынасы *бірінші ретті* $(k=1, p_0=q)$ *сызықтық біртекті* $(f(n)=0)$ *рекуренттік қатынас* болады.

1. Сызықтық рекуренттік қатынас

Біз сызықтық тұрақты коэффициентті рекуренттік қатынастарды қарастырумен шектелеміз.

Анықтама 2. $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ тізбегі *k – ретті сызықтық тұрақты коэффициентті қайтымды (рекурентті тізбек) тізбек* деп аталады, егер ол

$$a_{n+k} = p_{k-1}a_{n+k-1} + p_{k-2}a_{n+k-2} + \cdots + p_0 a_n + f(n)$$

түріндегі рекуренттік қатынаспен берілсе, мұндағы $p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}$ — *коэффициенттер* деп аталатын тұрақты сандар, $f(n)$ - *натурал аргументті функция.*

Рекурентті қатынасты шешу

Сан тізбегі ұғымын енгізгенде, «$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *сан тізбегі беріледі* деп тек оның жалпы мүшесі, яғни натурал сандар жиынында анықталған $a_n = f(n), n \in N$ функциясы берілгенде ғана айтамыз» делінген болатын.

Енді біз сан тізбегін, егер ол қайтымды болса, рекурентті қатынаспен де беруге болатынын көріп отырмыз.

Осы арада, «Тізбекті беретін рекурентті қатынастан оның жалпы мүшесін шығарып алуға, яғни тізбекті айқын түрде беруге болмас па екен?» деген сұрақ туады.

Рекурентті қатынасты пайдаланып тізбектің $a_n = f(n)$ жалпы мүшесін табу есебі – *рекурентті қатынасты шешу* деп аталады да, $a_n = f(n)$ *рекурентті қатынастың шешімі* деп аталады.

Мысал 3. $a_{n+1}=a_n+d$ рекурентті арифметикалық прогрессия қатынасын шешіңіз.

Шешімі:

$$a_{n+1} = a_n + d =$$
$$= (a_{n-1} + d) + d =$$
$$= a_{n-1} + 2d =$$
$$= (a_{n-2} + d) + 2d =$$

$$a_{n-2} + 3d = \cdots = a_{n-(n-1)} + nd =$$
$$= a_1 + nd \Rightarrow a_{n+1} = a_1 + nd \Rightarrow$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow$$

берілген арифметикалық прогрессияның жалпы мүшесі, яғни шешімі

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

функциясы болады ($f(n) = a_1 + (n-1)d$).

Сол сияқты, $b_{n+1} = b_n q$ геометриялық прогрессия қатынасының шешімі

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

функциясы болатынын көрсетуге болады

($f(n) = 5q^{n-1}$).

Енді рекурентті қатынасты шешудің кейбір әдістеріне тоқталайық.

1) Туындатқыш функцияны қолдану әдісі

Туындатқыш функцияны қолдану әдісін де тізбектің шешімі «туындатқыш функция» деп аталатын

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

түріндегі дәрежелік қатарды қолдану арқылы ізделінеді.

Бұл қатарда нөмірлеу нөлінші нөмірден басталатындықтан, сәйкестік үшін, берілген қайтымды тізбектің мүшелерін де нөліншіден бастап нөмірлейміз:

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

тізбегі қандай да бір рекуренттік қатынасты қанағаттандырсын.

Бізге, осы рекуренттік қатынасты пайдаланып, тізбектің a_n жалпы мүшесін табу керек (яғни тізбекті айқын түрде беру керек).

Рекурентті қатынасты туындатқыш функцияны қолдану арқылы шешеміз.

Туындатқыш функцияны қолданудың жалпы схемасын мысалмен қарастырайық.

Біртекті 2–ші ретті тұрақты коэффициентті сызықтық

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1$$

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

рекуренттік қатынасы берілсін (рекуренттік қатынас 2-ші ретті болғандықтан оның алғашқы $a_0,\ a_1$ екі мүшесі беріледі. Анықтама 1 қараңыз).

Рекурентті қатынасты шешу, яғни тізбектің a_n жалпы мүшесін (шешімін) табу керек.

Тізбектің шешімін

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

туындатқыш функциясын (дәрежелік қатарын) қолдану арқылы іздейміз.

Есептің шартында берілген тізбектің a_0, a_1, a_n мүшелерінің

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1, a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

мәндерін қатарға қоямыз:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n =$$

$$=0 + 1 \cdot z + \sum_{n=2}^{\infty}(5a_{n-1} - 6a_{n-2})z^n \Rightarrow$$

$$G(z)=z+5\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}z^n-6\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}z^n. \qquad (*)$$

Теңдіктің оң жағындағы өрнекті $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ түріне келтіреміз.

Бірінші $\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^n$ қатарын қарастырамыз.

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^n = z \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^{n-1} =$$
$$= z \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = z\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + a_0 - a_0\right) =$$
$$= z\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + a_0\right) - a_0 z =$$
$$= z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - 0 = z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = zG(z).$$

Осыған ұқсас түрлендірулерді $\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^n$ өрнегіне қолдану арқылы

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^n = z^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^{n-2} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = z^2 G(z).$$

теңдігін аламыз.

$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^n$ және $\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^n$ өрнектерінің алынған мәндерін $(*)$ теңдігіне қойямыз:

$$G(z) = z + 5zG(z) - 6z^2G(z), \Rightarrow$$

$$G(z) - 5zG(z) + 6z^2G(z) = z \Rightarrow$$

$$(1 - 5z + 6z^2)\, G(z) = z.$$

$G(z)$ туындатқыш функциясын табамыз:

$$G(z) = \frac{z}{1 - 5z + 6z^2}.$$

Енді, осы теңдіктің оң жағын, $\frac{1}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ теңдігін пайдаланып, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ түріне келтіреміз:

$$G(z)=\frac{z}{1-5z+6z^2}=\frac{z}{(1-3z)(1-2z)}.=$$

$$=\frac{z}{(1-3z)(1-2z)}=\frac{1}{1-3z}-\frac{1}{1-2z}.=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(3z)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(3^n-2^n)z^n.$$

Сонымен

$$G(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(3^n-2^n)z^n.$$

Бұл теңдіктен, $G(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ екенін ескерсек,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(3^n-2^n)z^n$$

теңдігін аламыз.

Алынған теңдіктің екі жағын салыстыра отырып тізбектің

$$a_n=(3^n-2^n)z^n$$

жалпы мүшесін, яғни берілген рекурентті қатынастың шешімін аламыз.

2) Сипаттамалық теңдеуді қолдану тәсілі

Туындатқыш функцияны қолдану әдісін де тізбектің шешімі «туындатқыш функция» деп аталатын

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

түріндегі дәрежелік қатарды қолдану арқылы ізделінеді.

Сызықтық тұрақты коэффициентті рекуренттік тізбектерді шешудің бұл әдісі сызықтық тұрақты коэффициентті дифференциалдық теңдеулерді шешу әдісіне толығымен дерлік ұқсас.

Бірінші біртекті қатынасты қарастырамыз.

2.1 Сызықтық тұрақты коэффициентті біртекті рекуренттік қатынасты шешу

Алғашқы k мүшесі, яғни бастапқы шарттары берілген k – ретті сызықтық тұрақты коэффициентті біртекті рекуренттік қатынас (теңдеу) берілсін:

$$a_{n+k} + p_{k-1}a_{n+k-1} + p_{k-2}a_{n+k-2} + \cdots + p_0 a_n = 0 \quad (1)$$

(1) теңдеуінің шешімі

$$a_n = \lambda^n \quad (2)$$

түрінде ізделінеді.

1. (1)қатынасының сипаттамалық теңдеуін жазамыз:

$$\lambda^k + p_{k-1}\lambda^{k-1} + p_{k-2}\lambda^{k-2} + \cdots + p_1\lambda + p_0 \qquad (3)$$

сипаттамалық теңдеу.

(3) сипаттамалық теңдеуі $a_n = \lambda^n$ мәнін (1) теңдеуіне қою арқылы алынады ($a_n = \lambda^n$ (1) теңдеуінің шешімі болғандықтан теңдеуді қанағаттандырады).

2. Сипаттамалық теңдеудің түбірлерін табамыз.

3. Алынған әр түбірге сәйкес (1) рекурентті қатынасының шешімдерін жазамыз:

Бір түбірге, оның еселігіне және оның нақтылығы мен комплекстігіне байланысты, (1) теңдеуінің бір ғана немесе бірнеше шешімі сәйкес келуі мүмкін:

λ - жай нақты түбірі болса, оған $a_n = \lambda^n$ шешімі сәйкес келеді;

λ – m еселі нақты түбірі болса, оған

$$a_n^{(1)} = \lambda^n, a_n^{(2)} = n\lambda^n, \dots, a_n^{(m)} = n^{m-1}\lambda^n$$

шешімдері сәйкес келеді;

$\lambda = a \pm ib = |\lambda|\left(\cos(arg\lambda) \pm isin(arg\lambda)\right)$ - жай түйіндес комплекс түбірлері болса, оларға

$$a_n^{(1)} = |\lambda|^n cosn(arg\lambda), a_n^{(2)} = |\lambda|^n sinn(arg\lambda)$$

шешімдері сәйкес келеді;

$\lambda = a \pm ib = |\lambda|\left(\cos(arg\lambda) \pm isin(arg\lambda)\right)$ – m еселі түйіндес комплекс түбірлері болса, оларға

$$a_n^{(1)} = |\lambda|^n cosn(arg\lambda)\ , a_n^{(2)} = n|\lambda|^n cosn(arg\lambda), \dots, a_n^{(m)} = n^{m-1}|\lambda|^n cosn(arg\lambda),$$

$$a_n^{(m+1)} = |\lambda|^n sinn(arg\lambda), a_n^{(m+2)} = n|\lambda|^n sinn(arg\lambda), \dots, a_n^{(2m)} = n^{m-1}|\lambda|^n sinn(arg\lambda)$$

шешімдері сәйкес келеді.

Бұл шешімдер *дербес шешімдер* деп аталады.

4. Дербес шешімдердің әрқайсысын еркін тұрақтыға көбейтіп, алынған көбейтінділерді қосу арқылы рекуренттік қатынастың жалпы шешімін құрамыз.

5. Қатынастың алғашқы k мүшелерінің берілген мәндерін жалпы шешімге қою арқылы еркін тұрақтылардың мәндерін табамыз.

6. Еркін тұрақтылардың табылған мәндерін жалпы шешімге қою арқылы қатынастың бастапқы шарттарды қанағаттандыратын дербес шешімін аламыз.

Алгоритмді мысалмен қарастырайық.

Мысал 1.

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 5a_n = 0,\ n \in N \qquad (4)$$

рекуренттік теңдеуінің

$$a_1 = 2,\ a_2 = 1 \qquad (5)$$

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табу керек.

Шешімі: Жоғарыдағы алгоритм бойынша шешеміз.

1. (4) рекуренттік қатынасының (3) сипаттамалық теңдеуін құрамыз:
   $\lambda^2-6\lambda+5=0$.
2. Сипаттамалық теңдеудің түбірлерін табамыз:
   $\lambda_1=5, \lambda_2=1$.

3. Әр түбірге сәйкес рекуренттік қатынасының шешімдерін жазамыз:
$\lambda_1=1$, $\lambda_2=5$ – жай нақты түбірлер, онда олардың әрқайсысына $a_n = \lambda^n$ түріндегі бір - бір түбірден сәйкес келеді:
$a_n^{(1)} = 1^n = 1$, $a_n^{(2)}=5^n$.
4. (4) рекуренттік қатынасының жалпы шешімін құрамыз:
$a_n = c_1 a_n^{(1)} + c_2 a_n^{(2)} = c_1 \cdot 1 + c_2 5^n \Rightarrow$
$a_n = c_1 + c_2 5^n$
(4) рекуренттік қатынасының жалпы шешімі, мұндағы c_1, c_2 – еркін тұрақтылар.

5. (5) бастапқы шарттарда берілген $a_1 = 2,\ a_2 = 1$ мәндерін жалпы шешімге қою арқылы c_1, c_2 – еркін тұрақтыларының мәндерін табамыз:

$$\begin{cases} a_1 = c_1 \cdot 1 + c_2 5^1 \\ a_2 = c_1 \cdot 1 + c_2 5^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = c_1 + 5c_2 \\ 1 = c_1 + 25c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{20} \\ c_2 = \frac{9}{4} \end{cases}.$$

6. Еркін тұрақтылардың $c_1 = -\frac{1}{20}$, $c_2 = \frac{9}{4}$ мәндерін жалпы шешімге қою арқылы(4) рекурентті қатынасының (5) бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін аламыз:

$$a_n = -\frac{1}{20} + \frac{9}{4}5^n$$

(4) рекуренттік теңдеуінің (5) бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімі.

Мысал 2.

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0,\ n \in N \qquad (6)$$

рекуренттік теңдеуінің

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3 \qquad (7)$$

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табу керек.

Шешімі: Жоғарыдағы алгоритм бойынша шешеміз.

1. (6) рекуренттік қатынасының (3) сипаттамалық теңдеуін құрамыз
   $\lambda^2-4\lambda+4=0$.
2. Сипаттамалық теңдеудің түбірлерін табамыз:
   $\lambda_1=\lambda_2=2$.

3. Сипаттамалық теңдеудің түбірлері нақты және бір-біріне тең, яғни $\lambda_1=\lambda_1=2$ екі еселі түбір.

Олай болса бұл түбірге (6) қатынасының

$$a_n^{(1)} = \lambda_1{}^n = 2^n,\ a_n^{(2)} = n\lambda_1{}^n = n2^n$$

екі шешімі сәйкес келеді.

4. (6) рекуренттік қатынасының жалпы шешімін құрамыз:

$$a_n = c_1 a_n^{(1)} + c_2 a_n^{(2)} = c_1 \cdot 2^n + c_2 n2^n \Rightarrow$$

$$a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 n2^n$$

(6) рекуренттік қатынасының жалпы шешімі, мұндағы c_1, c_2 – еркін тұрақтылар.

5. (5) бастапқы шарттарда берілген $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ мәндерін жалпы шешімге қою арқылы c_1, c_2 – еркін тұрақтыларының мәндерін табамыз:

$$\begin{cases} a_1 = c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot 1 \cdot 2^1 \\ a_2 = c_1 \cdot 2^2 + c_2 \cdot 2 \cdot 2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2c_1 + 2c_2 \\ 3 = 4c_1 + 8c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{4} \\ c_2 = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

6. Еркін тұрақтылардың $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = \frac{1}{4}$ мәндерін жалпы шешімге қою арқылы (6) рекурентті қатынасының (7) бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табамыз:

$$a_n = \frac{1}{4}2^n + \frac{1}{4}n2^n = (1+n)2^{n-2} \Rightarrow$$

$$a_n = (1+n)2^{n-2}$$

(6) рекуренттік теңдеуінің (7) бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімі.

Мысал 3.

$$a_{n+2} - \sqrt{2}a_{n+1} + a_n = 0,\ n \in N \qquad (8)$$

рекуренттік теңдеуінің

$$a_1 = -\sqrt{2},\ a_2 = 2\sqrt{2} \qquad (9)$$

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табу керек.

Шешімі: Жоғарыдағы алгоритм бойынша шешеміз.

1. (8) рекуренттік қатынасының (3) сипаттамалық теңдеуін құрамыз $\lambda^2-\sqrt{2}\lambda+1=0$.
2. Сипаттамалық теңдеудің түбірлерін табамыз:

$$\lambda_{1,2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4\cdot1}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}=1\left(\cos\frac{\pi}{4}\pm i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

3. Сипаттамалық теңдеудің түбірлері $\lambda_{1,2}$- жай түйіндес комплекс түбірлер.
Олай болса бұл түбірлерге (8) қатынасының
$a_n^{(1)} = 1^n cosn\frac{\pi}{4} = cosn\frac{\pi}{4}$, $a_n^{(2)} = 1^n sinn\frac{\pi}{4} = sinn\frac{\pi}{4}$
түрлеріндегі екі шешімі сәйкес келеді.
4. (8) рекуренттік қатынасының жалпы шешімін құрамыз:
$a_n = c_1 a_n^{(1)} + c_2 a_n^{(2)} = c_1 cosn\frac{\pi}{4} + c_2 sinn\frac{\pi}{4} \Rightarrow$
$a_n = c_1 cosn\frac{\pi}{4} + c_2 sinn\frac{\pi}{4}$
(8) біртекті рекуренттік қатынасының жалпы шешімі, мұндағы c_1, c_2 — еркін тұрақтылар.

5. (9) бастапқы шарттарда берілген $a_1 = -\sqrt{2}$, $a_2 = 2\sqrt{2}$ мәндерін жалпы шешімге қою арқылы c_1, c_2 – еркін тұрақтыларының мәндерін табамыз:

$$\begin{cases} a_1 = c_1 cos\frac{\pi}{4} + c_2 sin\frac{\pi}{4} \\ a_2 = c_1 cos2\frac{\pi}{4} + c_2 sin2\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} c_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} c_2 \\ 2\sqrt{2} = 0 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = -2 - 2\sqrt{2} \\ c_2 = 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

6. Еркін тұрақтылардың $c_1 = -2 - 2\sqrt{2}$, $c_2 = 2\sqrt{2}$ мәндерін жалпы шешімге қою арқылықатынастың $a_1 = -\sqrt{2}$, $a_2 = 2\sqrt{2}$ бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табамыз:

$$a_n = (-2 - 2\sqrt{2})cosn\frac{\pi}{4} + 2\sqrt{2}sinn\frac{\pi}{4}$$

(8) біртекті рекуренттік теңдеуінің (9) бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімі.

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

I. Негізгі ұғымдар

1. Рекуренттік қатынас (рекуррентное соотношение) дегеніміз не? Оны түсіндіріп, қарапайым мысал келтіріңіз (мысалы, Фибоначчи тізбегі).
2. Қайтымды тізбек (возвратная последовательность) ұғымын анықтаңыз. Рекуренттік қатынаспен қандай байланысы бар?
3. Рекуренттік қатынас пен жалпы мүшесінің формуласы (аналитикалық түрде берілген тізбек) арасындағы айырмашылықты түсіндіріңіз.
4. Рекуренттік қатынасты құрудың (негізгі есепті қайталану ретінде жазудың) практикалық маңызы неде? Ол қай салаларда кеңінен қолданылады?



II. Сызықтық рекуренттік қатынастар

5. Сызықтық рекуренттік қатынас (линейное рекуррентное соотношение) деп қандай қатынастарды айтады? Оның жалпы түрін жазып, түсіндіріңіз.
6. Тұрақты коэффициентті сызықтық рекуренттік қатынас (ЛОРС) ұғымын анықтаңыз. Оның ретін (order) қалай анықтайды?
7. Біртекті (homogeneous) және біртекті емес (non-homogeneous) сызықтық рекуренттік қатынастардың айырмашылығы неде? Мысалдар келтіріңіз.
8. Бастапқы шарттар (начальные условия) рекуренттік қатынас үшін не үшін қажет? Оларсыз шешімді табу мүмкін бе?





III. Сызықтық рекуренттік қатынастарды шешу әдістері

A. Сипаттамалық теңдеу әдісі

9. Сипаттамалық теңдеу (характеристическое уравнение) дегеніміз не? Оны тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық рекуренттік қатынас үшін қалай құрады?
10. Сипаттамалық теңдеудің түбірлерінің сипатына (нақты әртүрлі, нақты қайталанған, кешенді) байланысты рекуренттік қатынастың жалпы шешімін жазу ережелерін түсіндіріңіз.
11. Бастапқы шарттарды пайдаланып, рекуренттік қатынастың жеке шешімін (нақты тізбек мүшелерін) қалай табады? Шешудің негізгі қадамдарын сипаттаңыз.

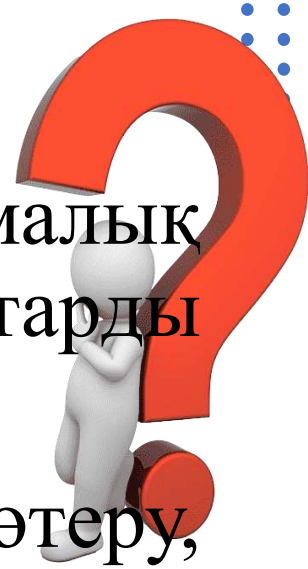
Б. Туындатқыш функциялар әдісі



12. Туындатқыш функция (производящая функция) дегеніміз не? Оның тізбектерді зерттеудегі ролін түсіндіріңіз.
13. Туындатқыш функция әдісінің мәні неде? Оны қолданып рекуренттік қатынасты шешу алгоритмінің негізгі идеясын сипаттаңыз (тізбектің туындатқыш функциясын құру, оған қатынас арқылы теңдеу алу, функцияны шешу, коэффициенттерден тізбек мүшелерін табу).
14. Сипаттамалық теңдеу әдісі мен туындатқыш функция әдісінің артықшылықтары мен кемшіліктерін салыстырыңыз. Қай жағдайда қандай әдіс тиімдірек?

IV. Қолданылуы мен мысалдар

15. Фибоначчи тізбегінің рекуренттік қатынасын, сипаттамалық теңдеуін және жалпы шешімін жазыңыз. Бастапқы шарттарды пайдаланып алғашқы бірнеше мүшесін есептеңіз.
16. Комбинаторикалық есептерді (мысалы, сатыларды көтеру, есептерді орналастыру, екілік тізбектер) рекуренттік қатынас түрінде қалай құруға болады? Бір мысал келтіріп түсіндіріңіз.
17. Алгоритмдерді талдауда (мысалы, рекурсивті алгоритмдердің уақыттық күрделілігін анықтауда) рекуренттік қатынастардың қолданылуын мысалмен түсіндіріңіз (мысалы, екіге бөліп іздеу, қайталанымды сұрыптау).



V. Қорытынды



18. Рекуренттік қатынастарды шешудің жалпы қиындықтары қандай? (Мысалы, біртекті емес қатынастар, жоғары ретті қатынастар, тұрақты емес коэффициенттер).
19. Рекуренттік қатынастарды шешудің басқа да әдістері туралы не білесіз? (Мысалы, матрицалық әдіс, итерация әдісі).
20. Рекуренттік қатынастарды зерттеудің дискреттік математика мен алгоритмдер теориясы үшін маңызы неде?

ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Дискреттік математика және математикалық логика негіздері : оқулық / Ф.Р. Гусманова, Қ.С. Дальбекова, С.Б. Беркімбаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 363, [1] б. ISBN 978-601-330- 339-0 LIBRARY.ENU
2. Байжуманов А.А. Дискреттік математика және математикалық логика : оқулық / А.А. Байжуманов, О.М. Ибрагимов. - Алматы : TechSmith, 2023. - 342, [1] б. : сур., кесте. - Библиогр.: б. 340. - ISBN 978- 601-342-643-3
3. Ерусалимский Я. М. Дискретная математика. Теория и практикум: Учебник для вузов Издательство "Лань", 2025
4. Гашков, С. Б. Дискретная математика : учебник для вузов / С. Б. Гашков. — 3- е изд., испр. и доп. — СанктПетербург : Лань, 2025. — 520 с. — ISBN 978-5-507- 49866-6. — Текст : электронный // Лань : электроннобиблиотечная система.
5. Тишин В. В. Дискретная математика в примерах и задачах. — СПб.: БХВ Петербург, 2008. — 352 с.

Назар аударғаныңызға рақмет!

