Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дәрістік сабақ 3-4

Таңдамалар және олардың түрлері. Комбинаториканың негізгі ережелері. Енгізу-шығару формулалары.

ДӘРІСТІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. Комбинаторика және қолданылуы
2. Комбинаториканың негізгі принциптері.
3. Орналастыру, теру, алмастыру

1. Комбинаторика және қолданылуы

Комбинаторика – берілген ақырлы жиынның элементтерінен қандай да бір шарттарды қанағаттандыратын әртүрлі комбинацияларды құру және олардың санын анықтау сұрақтарын қарастыратын математика саласы.

Қолданылуы:

- ықтималдықтар теориясы;
- математикалық логика;
- есептеуіш техника;
- кибернетика;
- бүтін сандық бағдарламалау.

2. Комбинаториканың негізгі принциптері

- ***Қосу принципі*** ("немесе" ережесі);
- ***Көбейту принципі*** ("және" ережесі);
- ***Дирихле принципі*** ("қояндар мен індер" принципі).

Қосу принципі.

Егер a нысанын n тәсілмен, ал b нысанын m тәсілмен таңдауға болса және a нысаны мен b нысаны бірге таңдалынатын тәсілдер саны k санына тең болса, онда

«a немесе b»

нысанын

$$n+m-k$$

тәсілмен таңдауға болады.

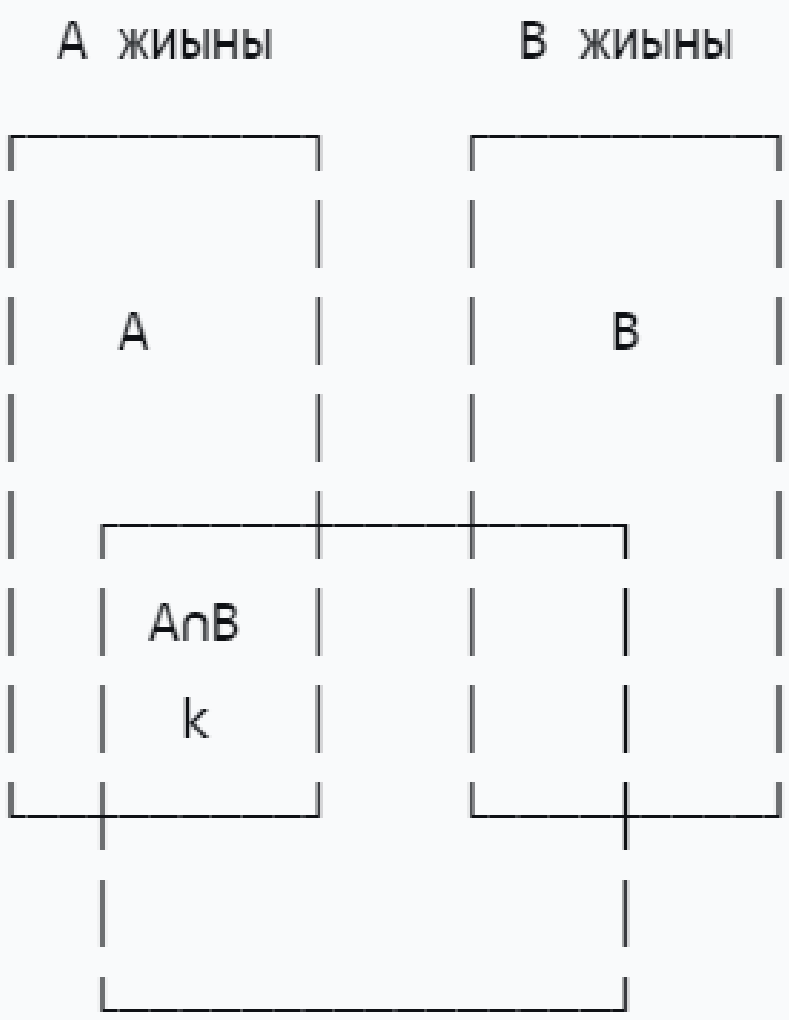
Формуласы:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Дәлелдеуі:

M жиынының элементтерінің санын |M| белгісімен белгілейік.

- *a нысанын n тәсілмен таңдау* дегенімізді *n* элементті A жиынының бір элементін таңдау;
- *b нысанын m тәсілмен таңдауға болады* дегенімізді *m* элементті B жиынының бір элементін таңдау;
- *a нысаны мен b нысаны бірге таңдалынатын тәсілдер (қайталанатын тәсілдер) саны k санына тең* дегенімізді A жиынына да, B жиынына да тиісті элементтердің, яғни $A \cap B$ қиылысуының элементтерінің саны *k* санына тең деп қарастыруға болады.



$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Олай болса *a немесе b нысанын таңдау тәсілдерінің санын табу* дегеніміз $A \cup B$ бірігуінің элементтерінің санын, яғни $|A \cup B|$ санын табу деген сөз.

Келтірілген схемадан $A \cup B$ бірігуінің элементтерінің саны A жиынының элементерінің саны $|A|$ мен B жиынының $A \cap B$ жиынына тиіссіз элементерінің санының, яғни $|B \setminus (A \cap B)|$ санының қосындысына тең болатынын көреміз:

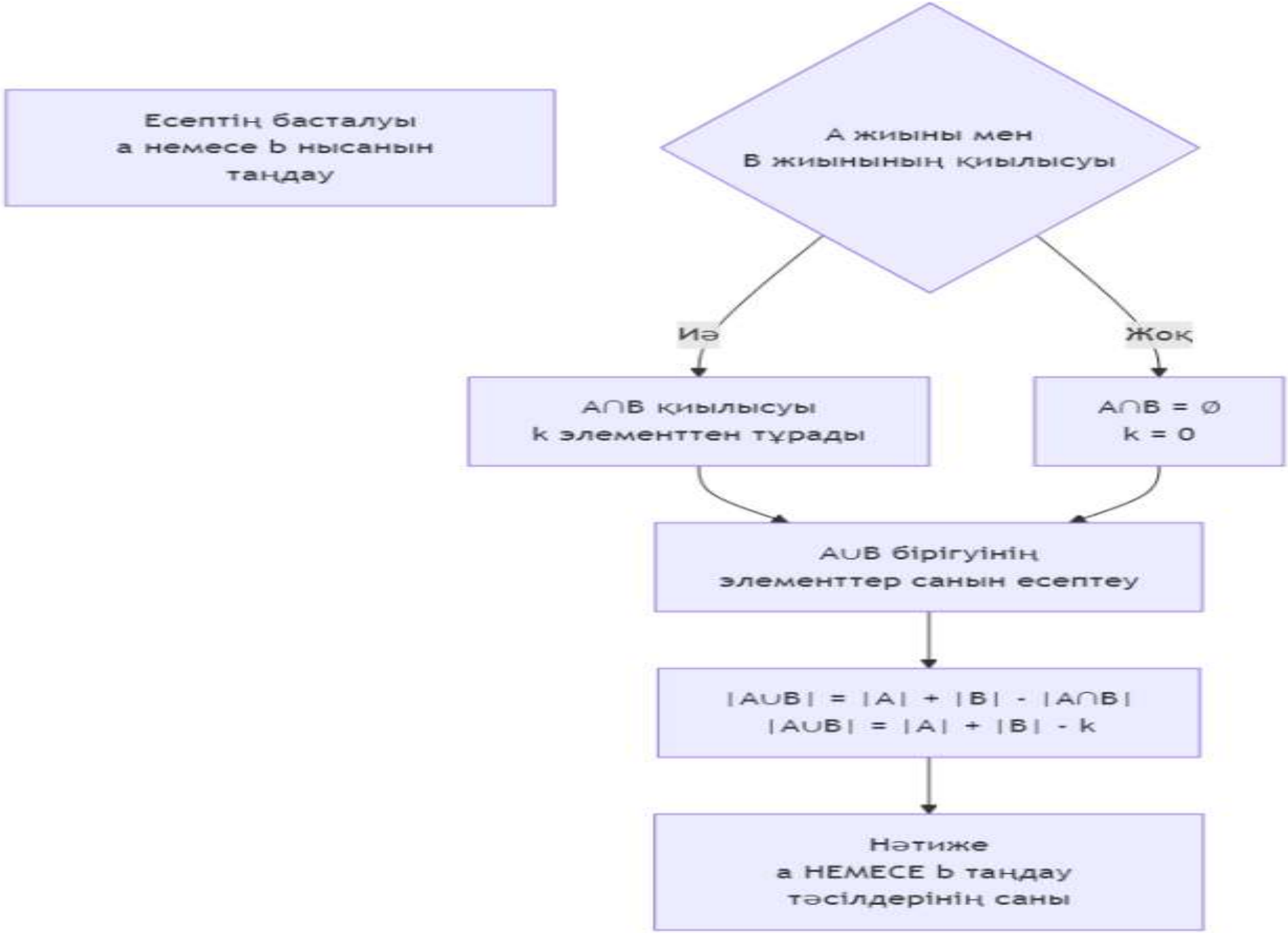
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|, \quad (1)$$

мұндағы $|M|$ дегеніміз M жиынының элементтерінің саны.

(1) теңдігінен $|A| = n$, $|B| = m$, $|A \cap B| = k$ екенін ескерсек

$$|A \cup B| = n + m - k$$

теңдігі, яғни, «***a* немесе *b***» нысанын $n+m-k$ тәсілмен таңдауға болатыны шығады.


Есептің басталуы
a немесе b нысанын
таңдау
A жиыны мен
B жиынының қиылысуы
Иә
Жоқ
A∩B қиылысуы
k элементтен тұрады
A∩B = ∅
k = 0
A∪B бірігуінің
элементтер санын есептеу
|A∪B| = |A| + |B| - |A∩B|
|A∪B| = |A| + |B| - k
Нәтиже
a НЕМЕСЕ b таңдау
тәсілдерінің саны

Схеманың түсіндірмесі:

1. **Есептің шарты:** Бізге a немесе b нысанын таңдау тәсілдерінің санын табу керек. Бұл логикалық "НЕМЕСЕ" (OR) операциясына сәйкес келеді.
2. **Жиындарға көшу:** Есепті шешу үшін оны жиындар тіліне аударамыз:
   - A жиыны – барлық a нысанын таңдау тәсілдерінің жиыны.
   - B жиыны – барлық b нысанын таңдау тәсілдерінің жиыны.
3. **Қиылысуды тексеру:** Ең маңызды қадам – A және B жиындарының қиылысуын, яғни ортақ элементтерін анықтау. Егер қиылысу болса, онда оның элементтер саны k-ға тең болады. Егер жалпы ортақ элементтер болмаса, онда $k = 0$.
4. **Бірігу санын есептеу:** Бізге қажет нәтиже – A немесе B жиынындағы элементтер саны, яғни A мен B жиындарының бірігуінің күші ($|A \cup B|$). Оны мына формула бойынша табамыз:
   - $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
   - Немесе берілген k санын пайдаланып: $|A \cup B| = |A| + |B| - k$
5. **Нәтиже:** Соңғы формула бізге a нысанын НЕМЕСЕ b нысанын таңдаудың жалпы санын береді.

Бұл схема комбинаторикадағы қосынды ережесінің негізгі идеясын көрсетеді: егер екі нысанды бір уақытта таңдау мүмкін болса (яғни, олардың жиындары қиылысатын болса), онда жалпы саны табу үшін қиылысуды бір рет алып тастау керек.

Қосу принципі: Егер екі іс-әрекет бір мезгілде орындалуы мүмкін болмаса (яғни, олардың нәтижелері бөлек болса), онда бірінші немесе екінші істі орындау тәсілдерінің саны олардың жеке санының қосындысына тең.

Мысал 1. Топта 12 ұл және 8 қыз бала бар. Тақтаға бір адамды қанша жолмен шақыруға болады?

Шешімі:

- a – ұл бала, таңдау саны $n = 12$;
- b - қыз бала, таңдау саны $m = 8$;
- a мен b бірге таңдалынбайды, бірге таңдалу саны $k = 0$.

Тақтаға бір адамды шақыру жолдарының саны ***a* немесе *b*** нысанын таңдау тәсілдерінің саны болады да, ол сан, қосу принципі бойынша,

$$n + m - k = 12 + 8 - 0 = 20$$

санына тең болады.

Мысал 2.

Топтың студенттері математика және философия пәндерінен емтихан тапсырды. Топтың 10 адамы математиканы беске, 7 адамы философияны беске және 4 адамы екеуін де беске тапсырды. Тым болмаса бір емтиханды беске тапсырған адамдар саны нешеу?

Шешімі:

- a – математиканы беске тапсырған студент, таңдау саны $n = 10$;
- b - қыз бала, таңдау саны $m = 7$.

Екі емтиханды да беске тапсырғандар, яғни a мен b бірге таңдалынатын әдістер $k = 4$.

Тым болмаса бір емтиханды беске тапсырған адамдар саны ***a* немесе *b*** нысанын таңдау тәсілдерінің саны болады да, ол сан, қосу принципі бойынша,

$$n + m - k = 10 + 7 - 4 = 13$$

санына тең болады.

Шешімі: Белгілеулер енгізсек:

- M - математиканы "5"-ке тапсырған студенттер жиыны.
- F - философияны "5"-ке тапсырған студенттер жиыны.

Берілген мәліметтер:

- $|M|=10$
- $|F|=7$
- $|M \cap F|=4$ (екеуін де "5"-ке тапсырғандар)

"Тым болмаса бір емтиханды беске тапсырған адамдар саны" - бұл $M \cup F$ бірігуінің элементтер саны.

Бірігу формуласы:

$$|M \cup F|=|M|+|F|-|M \cap F|$$

Мәндерді қоямыз:

$$|M \cup F|=10+7-4$$

$$|M \cup F|=13.$$

Мысал 3.

Топтағы 25 адамның 12 адамы шахмат, 14 адамы дойбы, 8 адамы шахмат та, дойбы да ойнай алады. Топта шахмат та, дойбы да ойнай алмайтын неше адам бар?

Шешімі:

S - шахмат ойнай алатын студенттер жиыны.

D - дойбы ойнай алатын студенттер жиыны.

Берілген мәліметтер:

- $|S|=12$
- $|D|=14$
- $|S\cap D|=8$ (екеуін де ойнай алатындар)
- Топтағы барлық адамдар саны: $|U|=25$

Шахмат немесе дойбы ойнай алатындар санын табу:

- Бірігу формуласы:
  $|S\cup D|=|S|+|D|-|S\cap D|$
- Мәндерді қоямыз:
  $|S\cup D|=12+14-8$
  $|S\cup D|=18$

Ешқайсысын ойнай алмайтындар саны:

Барлық топ мүшелерінің санынан кем дегенде бір ойнай алатындарды алып тастаймыз:

Ешқайсысын ойнай алмайтындар=

$=|U|-|S\cup D|=25-18=7.$

(1) формуласы екі жиын үшін *қосу және алу формуласы* деп аталады.

Оны *«енгізу – шығару формуласы»* деп те аталған.

Бұл формуланың бірнеше жиын үшін жалпыламасы төмендегідей жазылады:

$$|A_i \cup A_j \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cup A_j| + \sum_{i<j} |A_i \cup A_j| +$$

$$+ \sum_{i<j<k} |A_i \cup A_j \cup A_k| + \ \ldots + (-1)^{n-1} |\ A_i \cup A_j \cup \ldots \cup A_n|$$

$n = 3$ үшін бұл формула

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_i| + |A_j| + |A_3| - ||A_1 \cup A_2| - |A_1 \cup A_3| - |A_2 \cup A_3| + |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

түрінде жазылады.

Бұл теңдік

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3)$$

теңдігі мен (1) формуласынан шығады.

Мысал 4.

Топтағы әрбір студент не әнші, не биші, не домбырада ойнайды. Топта 16 әнші бар, оның 6-уы биші, және 4 биші домбырада ойнайды. Топта 11 биші бар, олардың 8-і домбырада ойнайды. Домбырада ойнайтындар саны 20, оның 12-сі әнші. Топта неше студент бар?

Шешімі:

A – әншілердің, B – бишілердің, C домбырашылардың жиыны болсын.

Онда:

|AUBUC| - топтағы студенттер саны;

A∩B – билейтін әншілер жиыны;

A∩C – домбырада ойнайтын әншілер;

B∩C - домбырада ойнайтын барлық бишілердің жиыны;

A∩B∩C - домбырада ойнайтын билейтін әншілер жиыны болады.

Есептің берілімі бойынша

|A| = 16, |A∩ B| = 6,

|B| = 11, |A∩C| = 12,

|C| = 20, |B ∩ C| = 8,

|A∩ B ∩C| = 4.

(1) формуласында n = 3 деп алсақ

|AUBUC|=|A|+|B|+|C|+|A∩B|–|A∩C|-

|A∩C|+|A∩B∩C|=16+11+20−(6+12+8)+4=2

теңдігін аламыз. Сонымен, топта 25 студент бар.

Көбейту принципі

Егер

- a нысанын n тәсілмен таңдауға болса,
- a нысаны таңдалған соң b нысанын m тәсілмен таңдауға болса,

онда

«a және b» нысанын $((a,b)$ жұбын$)$ $m \cdot n$ тәсілмен таңдауға болады.

Дәлелдеуі.

- a нысанын n тәсілмен таңдау дегенімізді n элементті A жиынының бір элементін таңдау,
- b нысанын m тәсілмен таңдауға болады дегенімізді m элементті B жиынының бір элементін таңдау деп қарастырсақ,

$((a,b)$ жұбы $A\times B$ декарттық көбейтіндісінің элементі болады да, олардың саны $A\times B$ жиынының элементтерінің санына, яғни $|A\times B|$ санына тең болады.

A жиынының әрбір элементі B жиынының кез келген элементімен бір жұп құратындықтан A жиынының әрбір элементіне $|B|=m$ жұп сәйкес келеді. Олай болса барлық жұптар саны

$$|A\times B| = |A| \cdot |B| = n\cdot m$$

санына тең болады.

Мысал 5. Бірінші топта 15, екінші топта 20 оқушы бар. Әр топтан бір оқушыдан неше жұп құруға болады?

Шешімі:

n = 15, m = 20

a – бірінші топтың оқушысы, таңдау саны $n = 15$;

b **-** қыз бала, ***a*** таңдалғаннан кейінгі таңдау саны $m = 20$;

Көбейту принципі бойынша жұп таңдау тәсілдерінің саны

$n \cdot m = 15 \cdot 20 = 300$.

Мысал 6. Таудың басына апаратын 5 жол бар. Таудан оған көтерілген жолдан басқа жолмен түсу қажет болса, тауға неше тәсілмен көтеріліп түсуге болады?

Шешімі:

a – тауға шығу жолы, таңдау саны $n = 5$.

b - таудан түсу жолы, ***a*** таңдалғаннан кейінгі таңдау саны $m = 4$ (5 жолдың біреуі таңдалып қойған, қалғаны төртеу).

Көбейту принципі бойынша (a,b) жұбын таңдау тәсілдерінің саны

$$n \cdot m = 5 \cdot 4 = 20.$$

Көтерілу (a): n = 5

Түсу (b, a-дан өзгеше): m = 4

$$n \cdot m = 5 \cdot 4 = 20.$$

Көбейту принципінің салдары

Егер

- a_1 нысанын k_1 тәсілмен таңдауға болса;
- a_1 нысаны таңдалған соң a_2 нысанын k_2 тәсілмен таңдауға болса;
- a_1, a_2 нысандары таңдалған соң a_3 нысанын k_3 тәсілмен таңдауға болса; ...;
- $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ нысандары таңдалған соң a_n нысанын k_n тәсілмен таңдауға болса,

онда

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

жинағын

$k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$

тәсілмен таңдауға болады.

Мысал 7. 3 адамды 5 орындыққа неше тәсілмен орналастыруға болады?

Шешімі:

- a_1 нысаны – бірінші адамның орындығы, оны, ол 5 орындықтың кез келгені бола алатындықтан, $k_1=5$ тәсілмен таңдауға болады.
- a_2 нысаны – екінші адамның орындығы, оны, ол a_1 нысаны таңдалған соң, яғни бір орындық таңдалып қойғаннан соң, қалған 4 орындықтың кез келгені бола алатындықтан, $k_2=4$ тәсілмен таңдауға болады.
- a_3 нысаны – үшінші адамның орындығы, оны, ол a_1, a_2 нысандары нысандары таңдалған соң, яғни екі орындық таңдалып қойғаннан соң, қалған 3 орындықтың кез келгені бола алатындықтан, $k_3=3$ тәсілмен таңдауға болады.

Олай болса, көбейту принципі бойынша, (a_1,a_2,a_3) үштігін таңдау тәсілдерінің саны

$k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

санына тең болады.

3 адамды 5 орындыққа орналастыру саны: **60.**

Дирихле принципі

Егер n інге $n + 1$ қоянды орналастырса, онда тым болмаса бір індегі қояндар саны 2 немесе одан да артық болады.

Ескерту. Іс жүзінде Дирихле принципінің «Егер қояндар саны індер санынан артық болса, онда тым болмаса бір індегі қояндар саны 2 немесе одан да артық болады» деген жалпыламасы қолданылады.

Мысал 8. Емтихан тапсырып шыққан 7 студенттің тым болмаса екеуінің бағасы бірдей болатынын дәлелдеңіз.

Шешімі:

- Бағалар – індер, індер саны төртеу: 2, 3, 4, 5.
- Студенттер – қояндар, қояндар саны жетеу.

Әрбір інге сәйкес бағалы қоян отырғызылады. Қояндар саны індер санынан артық, олай болса, Дирихле принципі бойынша, тым болмаса бір індегі қояндар саны екі немесе одан да артық болады, яғни төрт бағаның тым болмаса біреуіне сәйкес студенттер саны екі немесе одан да артық болады, яғни тым болмаса екі студенттің бағасы бірдей болады.

Қорытынды

- *Қосу принципі:* Әрекеттер бір-бірін жоққа шығармайтын болғанда қолданылады ("немесе").
- *Көбейту принципі:* Әрекеттер тәуелді болғанда қолданылады ("және").
- *Дирихле принципі:* Объектілерді категорияларға бөлуде және сандық қатынасты дәлелдеуде қолданылады.

Бұл принциптер дискретті математиканың іргетасы болып табылады және басқа да күрделі есептерді шешуде қолданылады.

3. Комбинаториканың негізгі элементтері

Қандай да бір n элементті $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ жиыны берілсін.

Ескерту. Жиында бірдей элемент болмайды.

Осы A жиынының элементтерінен құрылған k элементті $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)$ жиынтығын *k ұзындықты (комбинация, шеру)* немесе *n нен k бойынша таңдама (комбинация, шеру)* деп атаймыз.

Ескерту. Жиынтық - жиын емес, олай болса оның құрамында бірдей объектілердің болуы, яғни А жиынының бір элементінің (кез келгенінің) бірнеше рет қайталануы мүмкін.

Құрамында бірдей объектілер жоқ таңдама *қайталанусыз таңдама* деп, ал бірдей объектілер бар таңдама *қайталанулы таңдама* деп аталады.

Мысал 9. A ={2,7,6,9} жиыны берілсін. A жиыны 4 элементті жиын, яғни $n = 4$.

- θ=(2,7,9) таңдамасы 4 тен 3 бойынша қайталанусыз таңдама: k=3.
- θ=(2,7,6,9) таңдамасы 4 тен 3 бойынша қайталанусыз таңдама: $k = 4$.
- θ=(7,7) 4 тен 2 бойынша қайталамалы таңдама (7 элементі екі рет қайталанып тұр): $k = 2$.
- θ=(2,7,6,2,2,9,6) таңдамасы 4 тен 7 бойынша қайталамалы таңдама (2 элементі 3 рет, 6 элементі екі рет қайталанып тұр): $k = 7$.

Қайталанусыз алмастырулар

1 – анықтама. n элементті (n ұзындықты) қайталанусыз алмастырулар деп, бір – бірінен тек элементтерінің орналасу ретімен ғана өзгешеленетін n нен n бойынша қайталамасыз таңдамаларды айтамыз.

1 – теорема. n элементті (n ұзындықты) қайталанусыз алмастырулардың саны

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$$

санына тең.

Мысал 10. 5 студентті бір қатарға неше тәсілмен тұрғызуға болады?

Шешімі: 5 студентті бір қатарға тұрғызу тәсілі басқа тұрғызу тәсілінен
тек студенттердің орналасу ретімен ғана өзгешеленеді. Олай болса, 5 студентті бір қатарғатұрғызу, 1 – анықтама бойынша, 5 ұзындықты қайталанусыз алмастыру болады да олардың саны

$$P_5 = 5!$$

санына тең болады.
Жауабы. 5 студентті бір қатарға 120 тәсілмен отырғызуға болады?

Жаттығулар.

1. Тоғыз параққа 1 ден 9 дейінгі цифрлар жазылған. Осы парақтарды пайдаланып бірдей цифрлары жоқ неше 9 орынды сан жазуға болады?
2. Аудиториядағы 15 орындыққа 15 студентті неше тәсілмен отырғызуға болады?
3. 2,3, 4, 5, 6, 7 цифрларын пайдаланып неше алты орынды телефон нөмірін құруға болады?
4. 8 адам кезекке неше тәсілмен тұра алады?
5. Үш бірдей және сегіз әртүрлі кітапты бір сөреге үш бірдей кітап қатар тұратындай етіп неше неше тәсілмен қоюға болады?

Қайталанусыз терулер

2 – анықтама. n нен k бойынша қайталамасыз терулер деп бір бірінен тек құрамдарымен өзгешеленетін n нен k бойынша қайталанусыз таңдамаларды айтамыз.

2 – теорема. n нен k бойынша қайталамасыз терулер саны

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$$

санына тең болады.

Мысал 11. Топтағы 12 студенттің ішінен 3 кезекшіні неше тәсілмен тағайындауға болады?

Шешімі: Студенттер тобын 12 элементті жиын деп қарастырсақ, 3 кезекшіден тұратын топ ұзындығы үшке тең $\theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ қайталамасыз (топта бірдей студенттер жоқ) таңдамасы болады. Кезекшілер топтары, яғни $\theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ таңдамалары, тек құрамдарымен ғана өзгешеленеді (берілген топ тек топтың тым болмаса бір студентін өзгерткенде өзгереді). Онда, 2 – анықтама бойынша, $\theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ таңдамасы 12 ден 3 бойынша қайталанусыз теру болады да, олардың саны

$$C_{12}^{3}=\frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}=220$$

санына тең болады.

Жауабы. Топтағы12 студенттің ішінен 3 кезекшіні 220 тәсілмен тағайындауға болады.

Жаттығулар.

1. 10 ұяға 7 қызыл және 3 көк допты бір бірден неше тәсілмен салуғаболады?
2. 8 командaның әрбіреуі басқаларының әрқайсысымен бір реттен кездесу үшін неше ойын өткізу керек?
3. Спортлотоның 49 шаршысының 6 шаршысын неше тәсілмен толтыруға болады?
4. 3 допты 5 қорапқа неше тәсілмен салуға болады?
5. 25 студенттен тұратын топта 3 кезекшіні тәсілмен тағайындауға болады?

Терулер санының қасиеттері

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$, $k \le n$.

2) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Мысал 12.

$A = \{2,7,6,9\}$ жиынның әртүрлі цифрларынан құрылған екі орынды сандарды 4 тен 2 бойынша қайталанусыз орналастырулар деп қарастыруға бола ма?

Шешімі: A = {2,7,6,9} жиының цифрларынан құрылған екі орынды санды 4 тен 2 бойынша таңдама деп қарастыруға болады. Есептің шарты бойынша бұл таңдамалар әртүрлі цифрлардан құрылған, олай болса олар қайталанусыз таңдамалар.

Енді бұл таңдамалардың бір бірінен қалай өзгешеленетінін қарастырайық.

Егер санның тым болмаса бір цифрын өзгертсек сан да өзгереді (мысалы, 26 санының 6 цифрын 9 цифрына өзгертсек 26 санынан өзгеше 29 саны шығады), яғни таңдамалар құрамымен өзгешеленеді.

Егер әртүрлі цифрлардан тұратын санның цифрларының орналасу ретін өзгертсек сан да өзгереді (мысалы $27 \neq 72$), яғни таңдамалар элементтерінің ретімен өзгешеленеді.

Сонымен әртүрлі цифрлардан құрылған 2 орынды сандар құрамымен немесе элементтерінің ретімен өзгешеленетін 4 тен 2 бойынша қайталанусыз таңдамалар болып шықты. Онда олар, 3 – анықтама бойынша, 4 тен 2 бойынша қайталанусыз орналастырулар болады.

3 – теорема. n нен k бойынша қайталанусыз орналастырулар саны

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

санына тең болады.

Мысал 13. $A=\{2,7,6,9\}$ жиынның әртүрлі цифрларынан құрылған неше екі орынды сан жазуға болады.

Шешімі: 12 – мысалда $A=\{2,7,6,9\}$ жиынын әртүрлі цифрларынан құрылған екі орынды сандарды 4 тен 2 бойынша қайталанусыз орналастырулар деп қарастыруға болатыны көрсетілген болатын. Олай болса бұл екі орынды сандардың жалпы саны n нен k бойынша қайталанусыз орналастырулар санына, яғни

$$A_4^2=\frac{4!}{(4-2)!}=4\cdot 3=6$$

санына тең болады.

Жаттығулар.

1. 25 студенттен тұратын топтың старостасы мен оның орынбасарын неше тәсілмен тағайындауға болады?
2. 20 оқымыстыдан тұратын ғылыми қоғамның президентін, президенттің орынбасарын және ғылыми хатшысын неше тәсілмен тағайындауға болады?
3. Тоғыз параққа 1 ден 9 дейінгі цифрлар жазылған. Осы парақтарды пайдаланып бірдей цифрлары жоқ неше 5 орынды сан жазуға болады?
4. 5 тілдің кез келгенінен кез келгеніне аударма жасай алу үшін неше сөздік керек?
5. 4 ойын сүйегін тастағанда ұпайлардың қанша түрлі жұбы түсуі мүмкін?

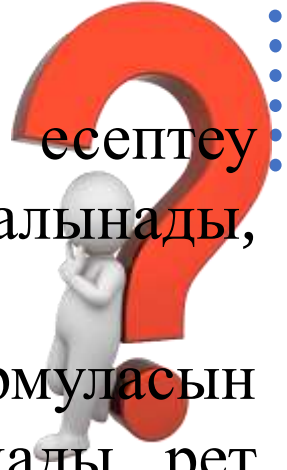
ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ



I. Комбинаторика және оның негіздері

1. Комбинатористиканың анықтамасын беріңіз және оның негізгі міндетін (объектілерді санау әдістерін зерттеу) түсіндіріңіз.
2. Комбинатористиканың қай салаларда қолданылатынын тізіп, әр саладан бір-бірден мысал келтіріңіз (мысалы, компьютерлік ғылым, ықтималдықтар теориясы, криптография, логистика).
3. Комбинаторикалық есептерді шешудің екі негізгі принципін (қосу принципін және көбейту принципін) түсіндіріңіз. Оларды бір-бірінен қалай ажыратуға болады?
4. Мына жағдайда қосу принципін қолдануға бола ма, әлде көбейту принципін пайдалану керек пе: 3 әртүрлі кітаптан 1-ін таңдау немесе 3 әртүрлі кітапты сөреде орналастыру?

II. Комбинаториканың негізгі конфигурациялары (таңдама түрлері)



5. **Алмастыру (перестановка, permutation)**. Берілген анықтамасын, есептеу формуласын (Pn = n!) және шарттарын түсіндіріңіз (барлық элементтер алынады, рет маңызды).
6. **Теру (комбинация, combination)**. Берілген анықтамасын, есептеу формуласын (C(n,k) = n! / (k!(n-k)!)) және шарттарын түсіндіріңіз (k элемент алынады, рет маңызды емес).
7. **Орналастыру (размещение, arrangement)**. Берілген анықтамасын, есептеу формуласын (A (n,k) = n! / (n-k)!) және шарттарын түсіндіріңіз (k элемент алынады, рет маңызды). Оны теру (комбинация) мен қалай салыстыруға болады?
8. Мына жағдайларды ажыратып, оларға сәйкес формуланы атаңыз:
    1. Спортшыларды подиумға (1,2,3 орын) орналастыру.
    2. Карталар колодасынан 6 карта тарту.
    3. "МАТЕМАТИКА" сөзіндегі әріптерді орналастыру.
    4. Топтан өкілдікке 3 адамды таңдау.
9. Үш негізгі конфигурация (алмастыру, теру, орналастыру) арасындағы байланысты формулалар арқылы көрсетіңіз (A (n,k) = Pk * C (n,k)).

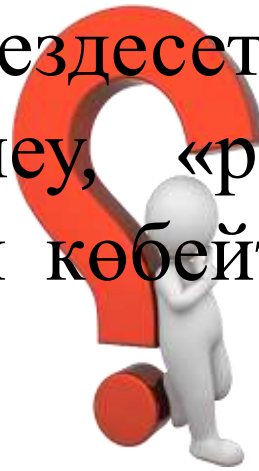


III. Күрделі комбинаторлық схемалар

10. **Қайталануы бар алмастырулар (permutations with repetitions)**. Есептеу формуласын (n!/(n1!*n2!*... *nk!)) түсіндіріп, мысал арқылы түсіндіріңіз (мысалы, "МАССА" сөзіндегі әріптерді қанша тәсілмен орналастыруға болады?).
11. **Қайталануы бар терулер (combinations with repetitions)**. Формуласын (C(n+k-1,k) және оны қолдану мысалын келтіріңіз (мысалы, 3 әртүрлі дәмдегі кәмпиттен 5 кәмпитті сатып алу).
12. **Енгізу-шығару формуласы (inclusion-exclusion principle)**. Оның мағынасын екі және үш жиын үшін формулалармен түсіндіріңіз. Оны қолдану қашан қажет болады?

IV. Қолданбалы аспектілер және қорытынды

13. Комбинатористиканың дискреттік математикадағы орны мен маңызы неде? Ол басқа дискреттік пәндермен (графтар теориясы, кодирлеу теориясы) қалай байланысады?
14. Комбинаторикалық есептерді шешу алгоритмін қалай құру керек? Негізгі қадамдарын түсіндіріңіз (есепті түсіну, объектілер мен шарттарды анықтау, сәйкес конфигурацияны таңдау, формуланы қолдану, жауабын талдау).
15. Комбинаторлық формулаларды есептеуде жиі кездесетін қателер қандай? (Мысалы, қайталануларды ескермеу, «рет маңызды/маңызды емес» дегенді шатастыру, қосу мен көбейту принциптерін дұрыс таңдамау).



ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Дискреттік математика және математикалық логика негіздері : оқулық / Ф.Р. Гусманова, Қ.С. Дальбекова, С.Б. Беркімбаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 363, [1] б. ISBN 978-601-330- 339-0 LIBRARY.ENU
2. Байжуманов А.А. Дискреттік математика және математикалық логика : оқулық / А.А. Байжуманов, О.М. Ибрагимов. - Алматы : TechSmith, 2023. - 342, [1] б. : сур., кесте. - Библиогр.: б. 340. - ISBN 978- 601-342-643-3
3. Ерусалимский Я. М. Дискретная математика. Теория и практикум: Учебник для вузов Издательство "Лань", 2025
4. Гашков, С. Б. Дискретная математика : учебник для вузов / С. Б. Гашков. — 3- е изд., испр. и доп. — СанктПетербург : Лань, 2025. — 520 с. — ISBN 978-5-507- 49866-6. — Текст : электронный // Лань : электроннобиблиотечная система.
5. Тишин В. В. Дискретная математика в примерах и задачах. — СПб.: БХВ Петербург, 2008. — 352 с.

Назар аударғаныңызға рақмет!

