Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дәрістік сабақ 2

Жиында анықталған қатынастар

ДӘРІСТІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. Жиындардың декарттық көбейтіндісі және оны бейнелеу;
2. Қатынастар ұғымы, түрлері;
3. Бинарлық қатынастардың берілу тәсілдері;
4. Бинарлық қатынастардың қасиеттері;
5. Эквивалентті қатынастар.

Жиындардың декарттық көбейтіндісі және оны бейнелеу

Анықтама 1. *X және Y жиындарының декарттық көбейтіндісі* деп бірінші элементі X жиынына тиісті, ал екінші элементі Y жиынына тиісті болып келген (x,y) реттелінген жұптарының жиынын айтамыз.

Ескерту:

Егер жұптың элементтерінің орналасу ретін өзгерту жұпты өзгертуге әкелсе, онда *жұп реттелінген* деп аталады.

Мысал 1:

(x,y) жұбын Oxy жазықтығының нүктесі деп қарастырсақ (x – абсцисса, y – ордината), егер $x \neq y$ болса, онда $(x,y) \neq (y,x)$ болады.

Мысалы, (2,5) жұбы мен (5,2) жұбы - әртүрлі нүктелер.

Декарттық көбейтінді $X \times Y$ түрінде белгіленеді:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ жиындарының *декарттық көбейтіндісі деп*

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$$

жиынын айтамыз.

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ *векторының* i *өсіне проекциясы* деп a_i координатасын айтамыз.

A векторларының жиынының өске проекциясы деп A векторларының осы өске проекцияларының жиынын айтады.

Екі жиынның декарттық көбейтіндісінің ішкі жиынын *график* деп атаймыз.

P графының инверсиясы деп

$$P^{-1} = \{(a,b) \mid (b,a) \in P\}$$

графигін атаймыз.

P және Q графиктерінің құрамы/ композициясы деп

$$P \circ Q = \{(a,b) \mid \exists_x ((a,x) \in P \quad \text{және} \quad (x,b) \in Q)\}$$

графигін атаймыз.

Мысал 2:

$A=\{1,2,3\}$ және $B=\{a,b\}$ берілсін. $A\times B$ және $B\times A$ декарттық көбейтінділерін табу керек.

Шешімі:

$A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$,

$B \times A = \{(a, 1), (b,1), (a,2), (b,2), (a,3), (b.3)\}$.

Бұл мысалдан $A \times B \neq B \times A$ екендігін, яғни, жиындардың декарттық көбейтіндісі үшін коммутативтілік заңы орындалмайтындығын көреміз.

Қатынастар ұғымы, түрлері

Қатынастар – жиын немесе жиындар элементтерінің арасындағы өзара байланыстарды беру тәсілдері.

Қатынастардың ішінен

- *унарлы,*
- *бинарлы*

қатынастар көбірек белгілі.

Унарлы (бір орынды) қатынастар бір жиын элементтерінің белгілі бір R қасиетінің болуын бейнелейді.

M жиынының R қасиетімен (белгісімен) ерекшеленетін элементтерінің жиыны M жиынының бір ішкі жиынын құрайды.

Мысал 3:

Қобдишадағы шарлардың бір бөлігінің ақ болуын қарастырсақ. Оларды унарлы қатынас деп атайды және R әрпімен белгіленеді, яғни

$a \in R,\ R \subseteq M.$

Бинарлы қатынастар М жиынының бір жұп элементтерінің қандай да бір өзара қарым-қатынасын анықтауға қолданылады.

Мысал 4:

М адамдар жиыны десек 2 адамның

- бір қалада тұруы;
- бір ұйымда қызмет істеуі;
- біреуінің екіншісінен жас болуы;
- әке мен бала болуы т. б.

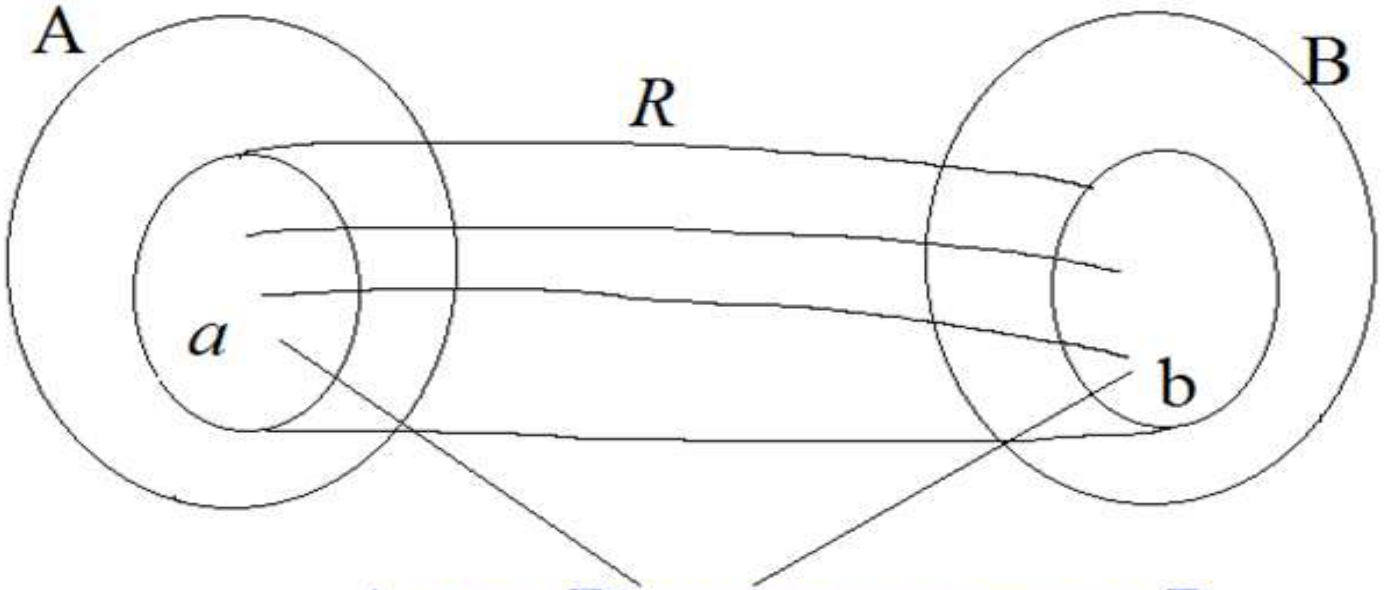
A және B жиындарындағы немесе A және B жиындарының арасындағы *екі орынды немесе бинарлық* P *қатынасы* деп $A \times B$ декарттық көбейтіндінің (a,b) жұптарынан тұратын ішкі жиынын атаймыз.

A және B жиындарындағы P бинарлық қатынастың белгіленуі:

$(a,b) \in P$ немесе a P b, $P \subseteq A \times B$.

А – Р қатынасының *анықталу облысы*, ал В *мәндер облысы* деп аталады.

$P \subseteq AxB$ қатынасы мына суреттегідей кескінделсін:



А мен В жиындарының R қатынасына кіретін элементтері

А-ның R-ға кірмейтін элементтері

В-ның R-ға кірмейтін элементтері

Бинарлы қатынас бір жиынның ішінде болса, мысалы M жиынында болса P қатынасы

$(a,b)\in P$, $P\subseteq MxM=M^2$ немесе $(a,b)\in P$, aPb

болып белгіленеді.

Жалпы жағдайда *n орынды R қатынасы* деп n жиынның тура (декарт) көбейтіндісінің R ішкі жиынын айтады:

$$R \subseteq M_1 x M_2 x \ldots x M_n.$$

Егер

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$, ал $(a_1 \in M_1, \ldots, a_n \in M_n)$

болса, онда $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *элементтері* R *қатынасында* делінеді.

Егер *n орынды R қатынасы M жиынында* болса, яғни

$M_1=M_2=\ldots=M_n$, онда $R\subseteq M^n$.

Мысал 5: $A = \{1,3,6\}$, $B = \{2,5\}$ болсын.

$$A \times B = \{(x,y): x \in A, y \in B\} =$$
$$= \{(1,2),(1,5),(3,2),(3,5)(6,2),(6,5)\}$$

$P = \{(3,2),(6,2),(6,5)\}$ жиынын қарастырайық.

$P \subset A \times B \Rightarrow$ P - A және B жиындарының арасындағы бинарлық қатынас.

$$P = \{(3,2),(6,2),(6,5)\} =$$
$$= \{(x,y): (x,y) \in A \times B \text{және } x > y\} \Rightarrow$$

x және y элементтері P қатынасында болады дегеніміз, $x > y$ деген сөз:

xPy немесе $(x,y) \in P \Leftrightarrow x > y$.

Егер $A=B$ болса, онда Р қатынасы A *жиынындағы бинарлық қатынас* деп аталады.

Анықтама 2. A және B жиындарындағы P *бинарлық қатынасының анықталу облысы* деп

$$D_P=\{x|\ \text{қандай да бір } y \text{ үшін } (x,y)\in P\}$$

жиынын айтамыз.

Анықтама 3. A және B жиындарындағы P *бинарлық қатынасының мәндерінің жиыны* деп

$$E_P=\{y|\ \text{қандай да бір } x \text{ үшін } (x,y)\in P\ \}$$

жиынын айтамыз.

Мысал 6: $A=\{1,2,6\}$ жиынында берілген

$$P=\{(x,y)|y: x \text{ бөліндісінің қалдығы } 1 \text{ - ге тең}\}$$

қатынасының анықталу облысы мен мәндерінің жиынын табыңыз.

Шешімі:

P қатынасы A жиынында берілген, яғни ол

$A \times A = \{(x, y): x \in A, y \in A\} =$

$= \{(1,1), (1,2), (1,6), (2,1), (2,2), (2,6), (6,1), (6,2), (6,6)\}$

жиынының екінші санын бірінші санына бөлгенде қалдық бірге тең болатын жұптарынан тұратын ішкі жиыны болады:

$P = \{(2,1), (6,1))\}$

түріндегі сипатталынуынан

$D_P = \{2,6\}$

және

$E_P = \{1\}$

болатыны шығады.

Бинарлық қатынастарды беру тәсілдері

Бинарлық қатынастарды *оның элементтерінің сипаттамалық қасиеттерін* немесе *барлық элементтерін көрсету арқылы* беруге болады.

Мысал 7:

$X = \{1,2,3,4\}$ жиынында берілсін. Х жиынында келесі қатынастарды анықтаймыз:

- $T = \{(x,y) \mid x,y \in X, x = y\}$ –теңдік қатынасы;
- $P = \{(x,y) \mid x,y \in X, x = y-1\}$ –ілгері жүру қатынасы;
- $Q = \{(x,y) \mid x,y \in X,$ x элементі y ке бөлінеді$\}$– бөлінгіштік қатынасы.

Бұл қатынастар *сипаттамалық қасиеттері арқылы* берілген.

Енді оларды *барлық элементтерін көрсету арқылы* берейік.

$$T = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\};$$

$$P = \{(1,2),(2,3),(3,4)\};$$

$$Q = \{(4,4),(4,2),(4,1),(3,3),(3,1),(2,2),(2,1),(1,1)\}.$$

Сонымен қатар, бинарлық қатынастарды

- *қатынасу графигі,*
- *қатынасу схемасы,*
- *қатынасу графы,*
- *қатынасу матрицасы*

сияқты көрнекілік әдістер арқылы да беруге болады.

Қатынасу графигі деп қатынастың (x,y) нүктелерінің декарттық координаталар жүйесіндегі геометриялық орындарын айтамыз.

Графиктік кескіндеудің бірнеше түрлері бар:

- Координат өстеріне қатынастың элементтерін белгілеу арқылы;
- А мен В жиындарының элементтерінің арасындағы Р қатынасын бағытшалар/ стрелкалар арқылы

көрсетуге болады.

Мысал 8:

$A=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ жиыны берілсін.

$$P=\{(x,y)|\ x,y\in A,\ y \text{ бөлінеді } x\text{-ке және } x\leq 3\}$$

бинарлы қатынасын

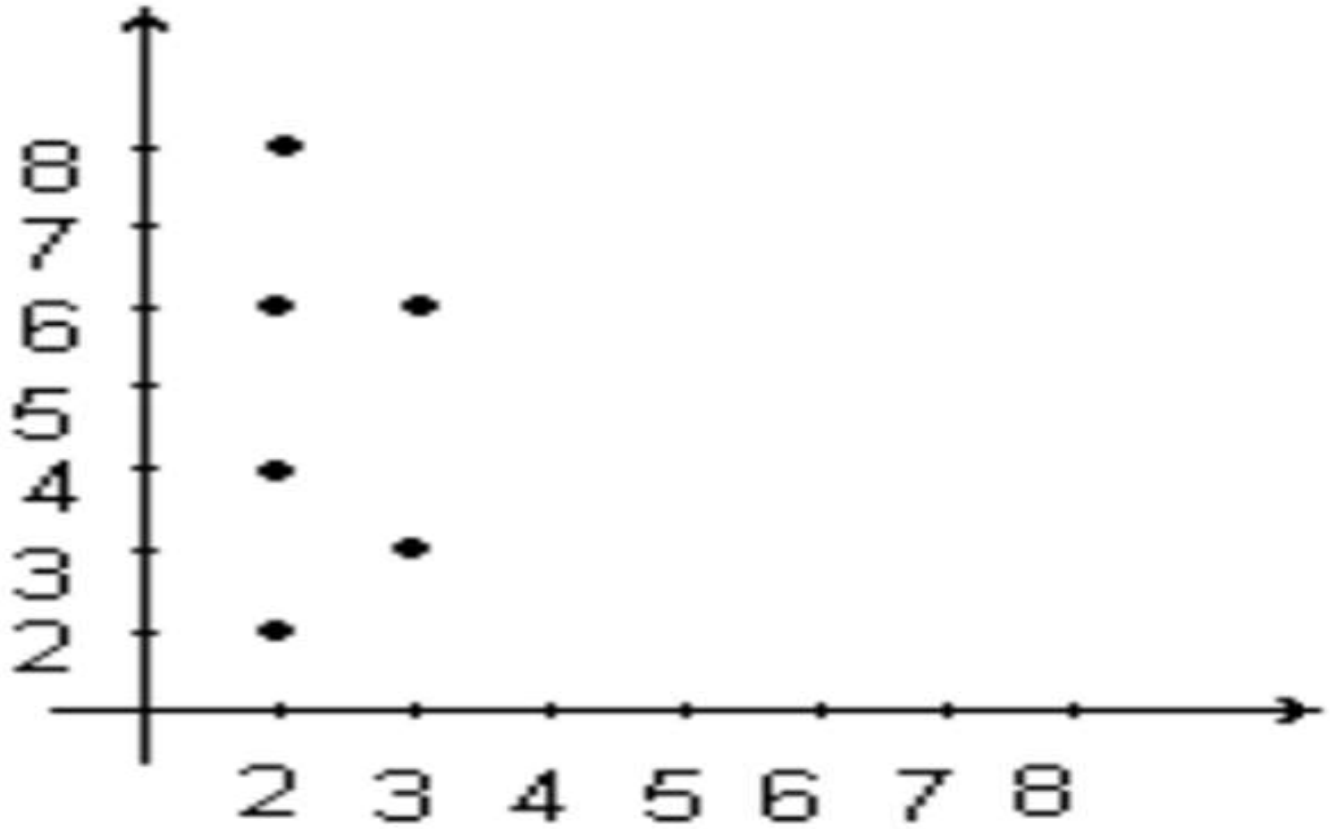
$$P=\{(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (3,3), (3,6)\}$$

түрінде жазуға болады. Графиктік кескіндеу түрлерін жекелей көрсету керек.

а) Координат өстеріне

P={(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (3,3), (3,6)}

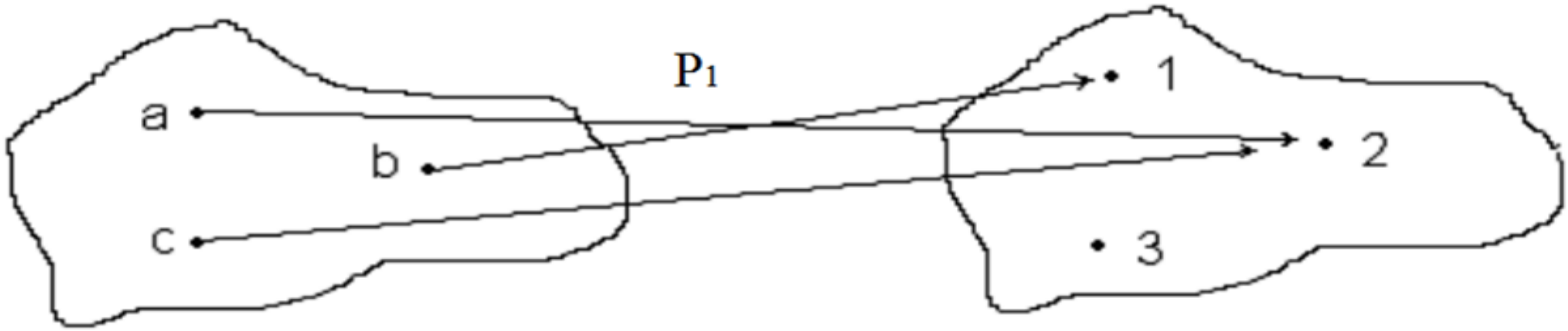
қатынасының элементтерін белгілеу арқылы көрсетсек:



б) А мен В жиындарының элементтерінің арасындағы Р қатынасын бағытшалар арқылы көрсетсек:

$$P_1=\{(a,2),(b,1),(c,2)\}$$

қатынасын төмендегідей кескіндеуге болады.



Мысал 9:

$X = \{1,2,3,4\}$ жиынында берілген

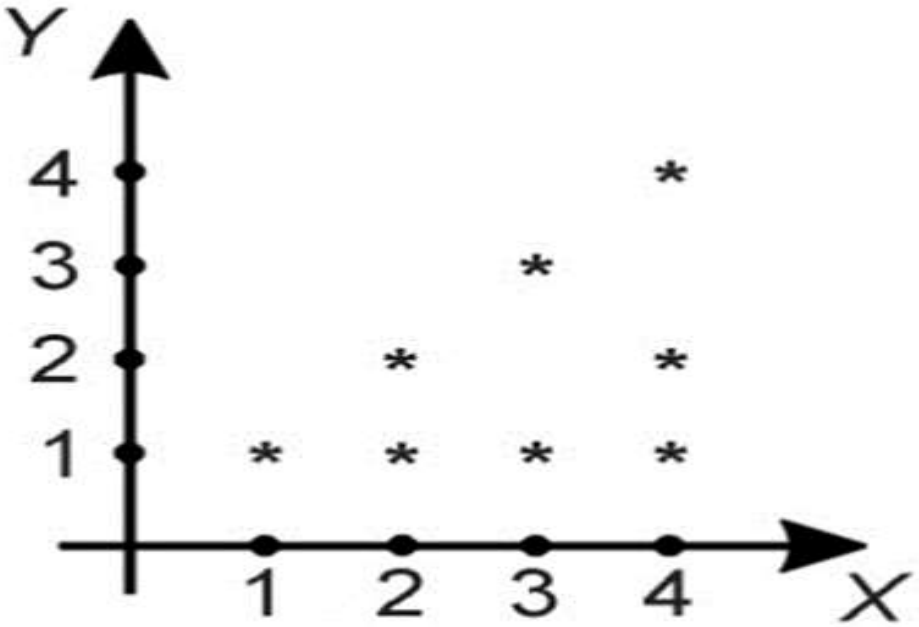
$$Q = \{(x, y) | x, y \in X, x \text{ саны } y \text{ санына бөлінеді}\}$$

бөлінгіштік қатынасының графигін тұрғызыңыз.

Шешімі: Q қатынасын оның элементтерін көрсету арқылы береміз:

$$Q = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}.$$

Қатынастың элементтерін декарттық жүйеде бейнелейміз (элементтер жұлдызшалармен бейнеленген):



Мысал 10: R нақты сандар жиынында берілген

$$W = \{(x, y) | x, y \in R,\ y \leq x\}$$

қатынасының графигін тұрғызыңыз.

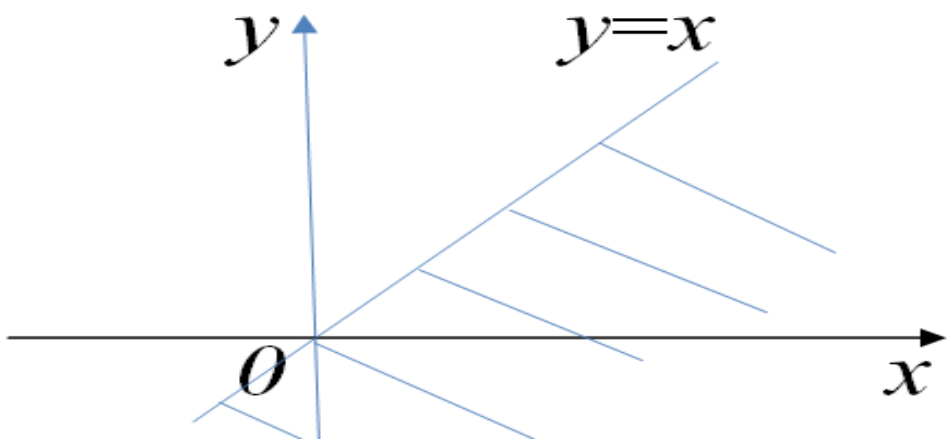
Шешімі:

W қатынасы

$$R \times R = \{(x, y): x, y \in R\}$$

көбейтіндісінің, яғни Oxy жазықтығының y ординатасы x абсциссасынан артпайтын (x,y) нүктелерінен тұратын жиын, яғни Oxy жазықтығының жоғарыдан y=x түзуімен шектелген жартысы болады.

W – қатынасының графигі:



Қатынасу схемасы екі тік (вертикаль) өстер арқылы беріледі. Сол жақ өсте қатынастың анықталу облысы, оң жақ өсте қатынастың мәндерінің облысы бейнеленеді.

Р қатынасына тиісті әрбір (x,y) элементі үшін

- *бір ұшы D_P облысының x нүктесі,*
- *екінші ұшы E_P облысының y нүктесі*

болатын кесінді тұрғызылады. Нәтижесінде алынған кесінділер қатынасу схемасын береді.

Мысал 11:

$X = \{1,2,3,4\}$ жиынында берілген

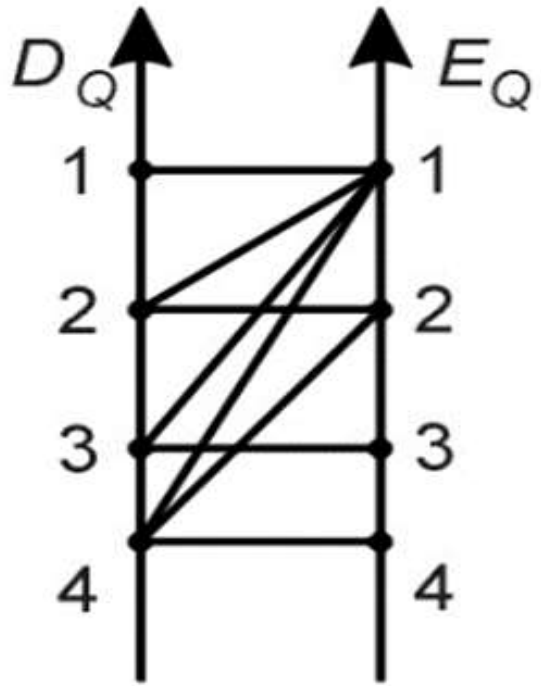
$$Q = \{(x, y) | x, y \in X, x \text{ саны } y \text{ санына бөлінеді}\}$$

бөлінгіштік қатынасының схемасын тұрғызыңыз.

Шешімі:

$$Q = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}.$$

Қатынасу схемасы:



$P \subset X \times X$ қатынасы үшін *қатынасу графы* келесі түрде анықталады: X жиынының элементтерін жазықтықтың кез-келген тәртіпте алынған қос қостан әртүрлі нүктелері арқылы бейнелейміз.

P қатынасының (x, y) жұбын құратын X жиынынң x, y элементтерін x элементінен y элементіне бағытталған доғамен жалғастырамыз. Нәтижесінде ***қатынасу графын*** аламыз.

Мысал 12:

$X = \{1,2,3,4\}$ жиынында берілген

$$Q = \{(x, y) | x, y \in X, x \text{ саны } y \text{ санына бөлінеді}\}$$

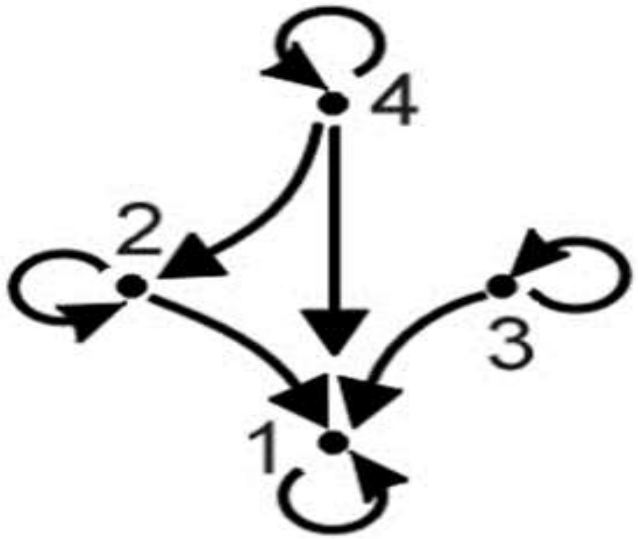
бөлінгіштік қатынасының графын тұрғызыңыз.

Шешімі:

$Q = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4)$

қатынасының әрбір элементі үшін жоғарыда айтылған доғаларды тұрғызамыз:

Q қатынасының графы:



Ескерту.

Қатынастың $x=y$ болатын (x,y) элементіне, яғни (x,x) элементіне (біздің мысалда $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)$ элементтеріне) сәйкес доға басы да ұшы да x нүктесі болатын *тұйық доға* болады.

$P \subset X \times X$ қатынасы үшін *қатынасу матрицасы* деп $X \times X$ көбейтіндісіне

$$a_{xy} = \begin{cases} 1, (x, y) \in P \\ 0, (x, y) \notin P \end{cases}$$

элементін сәйкес қою арқылы құрылған матрицаны айтамыз.

Мысал 13:

$X = \{1,2,3,4\}$ жиынында берілген

$$Q = \{(x, y) | x, y \in X, x \text{ саны } y \text{ санына бөлінеді}\}$$

бөлінгіштік қатынасының матрицасын тұрғызыңыз.

Шешімі:

$X \times X$ көбейтіндісінің (x, y) элементінің

$$Q = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4)$$

қатынасына тиісті тиіссіздігіне қарай a_{xy} элементін анықтаймыз:

$$(1,1) \in X, (1,1) \in Q \Rightarrow a_{11} = 1,$$
$$(1,2) \in X, (1,2) \notin Q \Rightarrow a_{12} = 0, \ldots.$$

Q қатынасының матрицасын құрамыз:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Бинарлық қатынастардың қасиеттері

1. $A \subset A$ рефлексивті қатынас;
2. $(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Rightarrow A = B$ симметрияға қарсы қатынас;
3. $A \subset B$, $B \subset C$ болса, онда $A \subset C$ транзитивті қатынас.

- Егер aPa $\forall a \in A$ орынды болса, онда A жиынындағы P бинарлық қатынасы *рефлексивті* деп аталады.
- Егер $xPy \Rightarrow yPx$ болса, A жиынындағы P бинарлық қатынасы *симметриялы* деп аталады.
- Егер xPy және $yPx \Rightarrow x=y$ болса, онда A жиынындағы P бинарлық қатынасы *антисимметриялы* деп аталады.
- Егер xPy және $yPz \Rightarrow xPz$. болса, A жиынындағы P бинарлық қатынасы *транзитивті* деп аталады.

A жиынындағы рефлексивті, симметриялы және транзитивті P бинарлық қатынасы *эквиваленттілік қатынас* деп аталады.

A жиынындағы рефлексивті, антисимметриялы және транзитивті P бинарлық қатынасы *жартылай реттілік* деп аталады.

A,B,C жиындары және $\Phi \subset A \times B$, $P \subset B \times C$ қатынастары берілсін. A мен B жиындарында Φ қатынасы ретінде, ал B мен C жиындарында P қатынасы ретінде анықталған $S \subset A \times C$ қатынасы *құрамды қатынас* деп аталады да $S = P \circ \Phi$ түрінде белгіленеді:

$$S = \{(x,y) | x \in A, z \in B: (x,z) \subset \Phi, (z,y) \subset P\}.$$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Декарттық көбейтіндінің анықтамасын беріңіз. Оны қалай белгілейміз?
2. Екі жиынның декарттық көбейтіндісін мысал арқылы түсіндіріңіз.
3. Декарттық көбейтіндінің қасиеттерін атаңыз.
4. Қатынас (relation) деген не? Бинарлық қатынас дегеніміз не?
5. Қатынастарды қалай белгілейміз? Мысал келтіріңіз.
6. Қатынастарды берудің негізгі тәсілдерін тізіп, түсіндіріңіз:

- Тізім түрінде
- Сипаттамалық түрде
- Бағдарланған граф түрінде
- Матрица түрінде



7. Қатынастарды бейнелеудің әдістерін атаңыз.
8. Бинарлық қатынастардың негізгі қасиеттерін тізіңіз:

- Рефлексивтілік
- Симметриялылық
- Антисимметриялылық
- Транзитивтілік



9. Рефлексивті қатынас деген не? Мысал келтіріңіз.
10. Симметриялы қатынас деп қандай қатынасты айтады? Мысал арқылы түсіндіріңіз.
11. Антисимметриялы қатынасты анықтап, мысал келтіріңіз.
12. Транзитивті қатынас деген не? Мысал арқылы көрсетіңіз.

13. Эквиваленттік қатынас деп қандай қатынасты айтады?
14. Эквиваленттік қатынас қандай қасиеттерге ие болуы керек?
15. Эквиваленттік кластар деген не? Олардың қасиеттерін түсіндіріңіз.
16. Қатынастардың композициясы деген не? Оны қалай есептейміз?
17. Қатынастардың кері қатынасын анықтап, мысал келтіріңіз.
18. Қатынастардың түрлерін (рефлексивті, симметриялы, т.б.) ажыратуды қалай тексеруге болады?
19. Бинарлық қатынастарды матрица арқылы қалай көрсетуге болады?
20. Граф арқылы қатынастарды бейнелеудің ерекшеліктері неде?



21. Қатынастардың қолданбалы маңызы неде? Оларды қай салаларда қолданады?
22. Эквиваленттік қатынас пен теңдік қатынасының арасындағы байланысты түсіндіріңіз.
23. Қатынастардың қасиеттерін тексеруге арналған мысалдар келтіріңіз.
24. Декарттық көбейтінді мен қатынастар арасындағы байланысты түсіндіріңіз.
25. Қатынастар теориясының дискреттік математикадағы орны мен маңызы неде?



ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Дискреттік математика және математикалық логика негіздері : оқулық / Ф.Р. Гусманова, Қ.С. Дальбекова, С.Б. Беркімбаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 363, [1] б. ISBN 978-601-330- 339-0 LIBRARY.ENU
2. Байжуманов А.А. Дискреттік математика және математикалық логика : оқулық / А.А. Байжуманов, О.М. Ибрагимов. - Алматы : TechSmith, 2023. - 342, [1] б. : сур., кесте. - Библиогр.: б. 340. - ISBN 978- 601-342-643-3
3. Ерусалимский Я. М. Дискретная математика. Теория и практикум: Учебник для вузов Издательство "Лань", 2025
4. Гашков, С. Б. Дискретная математика : учебник для вузов / С. Б. Гашков. — 3- е изд., испр. и доп. — СанктПетербург : Лань, 2025. — 520 с. — ISBN 978-5-507- 49866-6. — Текст : электронный // Лань : электроннобиблиотечная система.
5. Тишин В. В. Дискретная математика в примерах и задачах. — СПб.: БХВ Петербург, 2008. — 352 с.

Назар аударғаныңызға рақмет!

