Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

Дәрістік сабақ 1

Жиын ұғымы. Жиындарға қолданылатын амалдар және олардың қасиеттері.

ДӘРІСТІК САБАҚ ЖОСПАРЫ:

1. Жиын ұғымы.
2. Жиындарға қолданылатын амалдар және оның қасиеттері.

Дискретті математика қазіргі математиканың ең серпінді дамып келе жатқан бағыттарының бірі болып табылады және біздің өміріміздің барлық салаларын толықтай компьютерлендірудің бағдарламашыларына да, компьютерлік технологиялардың математикалық негіздерін жасаушы мамандарға да сұраныстың тұрақты өсуіне әкеледі.

Жиын ұғымы

Жиын ұғымы — математиканың негізінде жатқан жалпы ұғымдардың бірі.

Жиын ұғымының дәл анықтамасын беру мүмкін емес. Біз жиын деп нені түсінетінімізді ғана айта аламыз.

Әдетте *жиын* ретінде әртүрлі объектілердің алдын ала берілген ерекшеліктері, ортақ белгілері немесе қасиеттері бойынша топтастырылуын түсінеміз.

Жиынның объектілері оның *элементтері* деп аталады.

Жиындар A, B, C, … латынның бас әріптері арқылы, ал *олардың элементтері* a, b, c, … кіші әріптерімен белгіленеді.

$x \in A$ жазылымы *x элементінің A жиынына тиісті/ A жиынының элементі* екенін білдіреді.

Егер *x элементі A жиынының элементі болмаса*, онда $x \notin A$ немесе $\overline{x \in A}$ деп жазамыз.

Жиындар *жекелей элементтерін көрсету* немесе *элементтерінің қасиеттерін көрсету* арқылы беріледі.

Мысал 1:

$A=\{1,3,7\}$, $B=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ - *элементтерін көрсету арқылы берілген жиындар*:

- A – үш элементті жиын;
- B – n элементті жиын;

$C=\{x|\ x^3-5x^2+6x=0\}$ - элементтерінің қасиеттерін көрсету арқылы берілген жиын.

Мысал 2:

B жиынын элементтерін көрсету арқылы беріңіз.

Шешімі:

$B=\{x|x^3-9x^2+14x=0\}=\{x|x(x^2-9x+14)=0\}=\{x|x(x-2)(x-7)=0\}=$

$=\{x|\ x=0$ немесе $x=2$ немесе $x=7\}=\{0, 2, 7\},$

$B=\{0, 2, 7\}.$

Анықтама 1.

Құр жиын деп элементі жоқ (кез келген объект оған тиіссіз) жиынды атаймыз, белгіленуі: $\varnothing$.

Мысал 3:

E= {x| $x^2+x+2=0$ теңдеуінің шешімдерінің жиыны}.

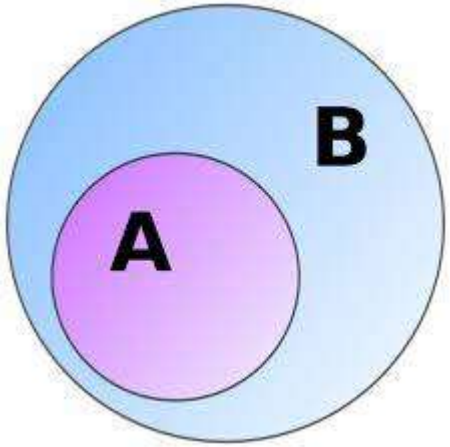
$x^2+x+2=0$ теңдеуінің дискриминанты

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$$

болғандықтан, бұл теңдеудің шешімі жоқ, олай болса E жиыны элементі жоқ жиын, яғни E– құр жиын: $E = \varnothing$.

Анықтама 2.

Егер A жиынының әрбір элементі B жиынының да элементі болса, онда *A жиыны B жиынының ішкі жиыны* деп аталады, белгіленуі: $A \subseteq B$.



$$A \subseteq B \Leftrightarrow \left(x \in A \Rightarrow x \in B\right)$$

Мысал 4:

$A = \{1,3,7\}$,

$B = \{-2,1,3,7,10\}$,

$C = \{-2,1,3,9,10\}$,

$A \subseteq B$

$A \not\subseteq C$, себебі $7 \in A$, бірақ $7 \notin C$.

Анықтамадан кез келген A жиыны үшін

$$A \subseteq A$$

болатыны шығады.

Кез келген A үшін

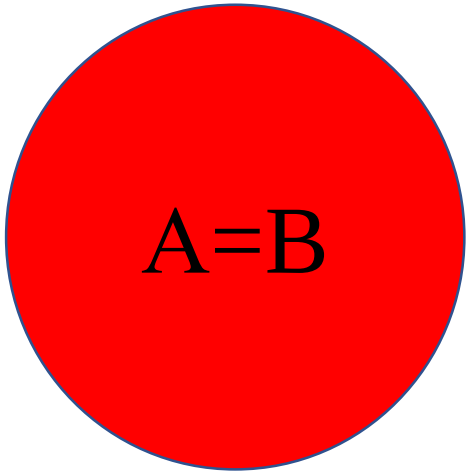
$$\varnothing \subseteq A$$

қатынасы ақиқат ретінде қабылданады.

Анықтама 3.

Егер A және B жиындарының бірінің элементі екіншісінің де элементі болса, онда, онда олар *тең жиындар* деп аталады, белгіленуі: $A = B$.

Кері жағдайда $A \neq B$.



$$A = B \Leftrightarrow \left(x \in A \Leftrightarrow x \in B\right)$$

Анықтамадан

$$A = B \Leftrightarrow \left(A \subseteq B \text{ және } B \subseteq A\right)$$

тұжырымы шығады.

Мысал 5:

$A=\{0;1;2\}$,

$B=\{1;0;2\}$,

$C=\{1;2;0\}$,

$D=\{\{1;2\};0\}$,

$E=\{1;2\}$,

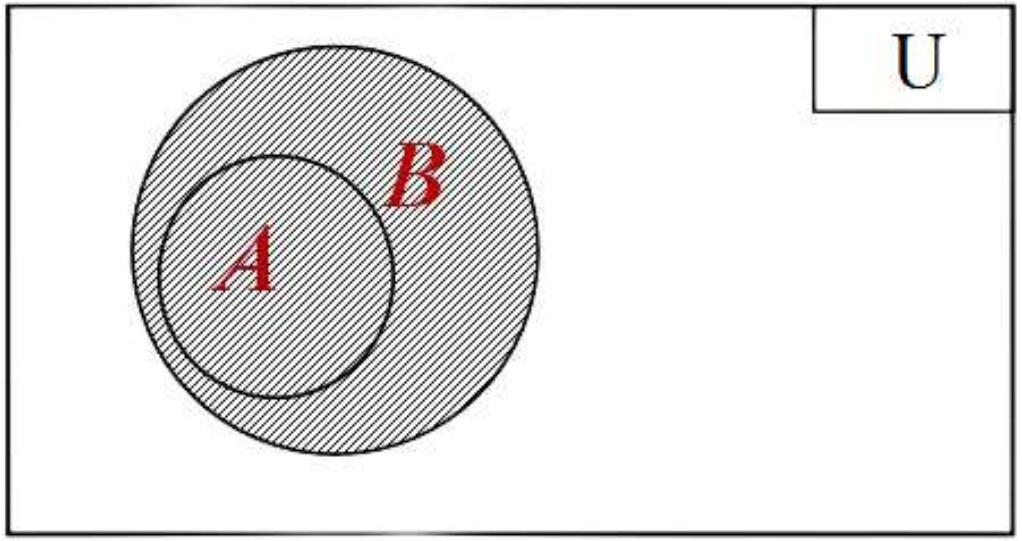
$F=\{x: x^3-3x^2+2x=0\}$

жиындарының ішінен тең жиындарды көрсетіңіз.

Шешімі:

$A=\ B=\ C=\ F.$

Егер $A \subseteq B$ және $A \neq B$ болса, онда *A жиыны B жиынның меншікті (қатаң) ішкі жиыны* деп аталады, белгіленуі: $A \subset B$ немесе $A \subsetneq B$.



Санаулы (бірнеше) ғана элементтері бар (элементтерінің саны шектелген) жиын *шектеулі жиын* деп аталады.

Элементтерінің саны шектелмеген, яғни кез келген n натурал саны үшін n элементті ішкі жиыны болатын жиын *шектеусіз жиын* деп аталады.

Мысал 6:

$A=\{1,3,7\}$,

$B=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ - шектеулі жиындар.

$C=\{x|\ x-3$ санына еселі оң сан$\}=\{3, 6, 9, \ldots\}$,

$B=\{a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots\}$– шектеусіз жиындар.

Теорема 1.

Кез келген A, B, C жиындары үшін келесі тұжырымдар орынды:

а) $A \subseteq A$;

б) $A \subseteq B$ және $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

Берілген *А жиынының барлық ішкі жиындарының тобы* *P(A)* арқылы белгіленеді.

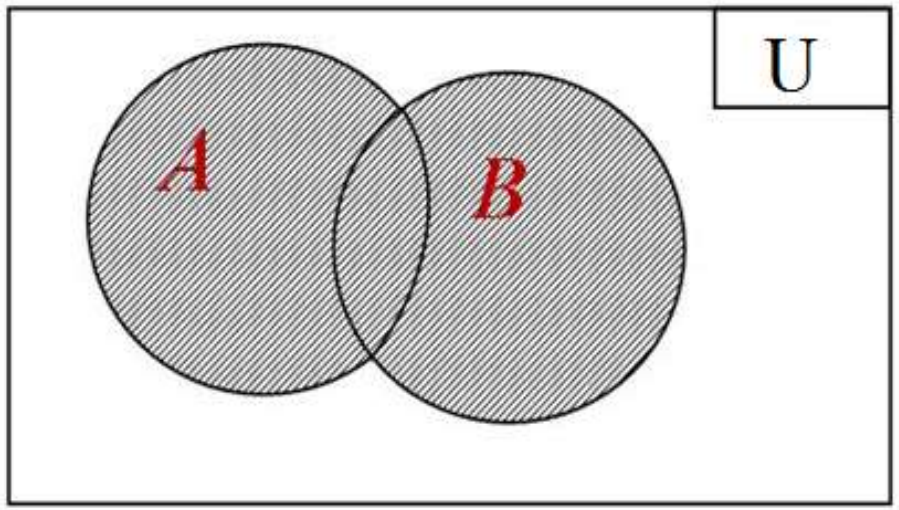
Шектеулі А жиынының қуаты/ кардиналы оның элементтерінің саны болады, белгіленуі: $|A|$.

Жиынға қолданылатын амалдар және оның қасиеттері

Анықтама 4.

A және B жиындарының бірігуі деп осы екі жиынның тым болмаса біреуіне тиісті болатын элементтерінен тұратын жиынды айтамыз, белгіленуі: $A \cup B$:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$



$\vee$ – "немесе"

Мысал 7:

Егер

$$A=\{1,2,3,4\},$$

$$B=\{2,4,6,8\}$$

болса, онда

$$A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$$

болады.

Теорема 2.

Жиындардың бірігуі үшін келесі тұжырымдар орынды болады:

а) $A \cup A = A$ – бірігудің *идемпоненттілігі*;

б) $A \cup B = B \cup A$ – бірігудің *коммутативтілігі*;

в) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – бірігудің *ассоциативтлігі*;
$A \cup \varnothing = A$;

д) $A \cup B = \varnothing \Leftrightarrow A = B = \varnothing$.

Дәлелдеуі:

а) $x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \Leftrightarrow x \in A.$

б) $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B \cup A.$

в) $x \in (A \cup B) \cup C \Leftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow$

$x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C).$

г) $x \in A \cup \varnothing \Leftrightarrow x \in A \vee x \in \varnothing \Leftrightarrow x \in A$, себебі $x \in \varnothing$ - жалған

д) $A \cup B = \varnothing$ болсын. Бұл теңдіктен кез келген x үшін $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in \varnothing$ тұжырымы шығады.

Онда, $x \in \varnothing$ - жалған болғандықтан, $x \in A \cup B$ - жалған болады. Олай болса

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

болғандықтан $x \in A \vee x \in B$ - кез келген x үшін жалған болады.

Онда кез келген x үшін

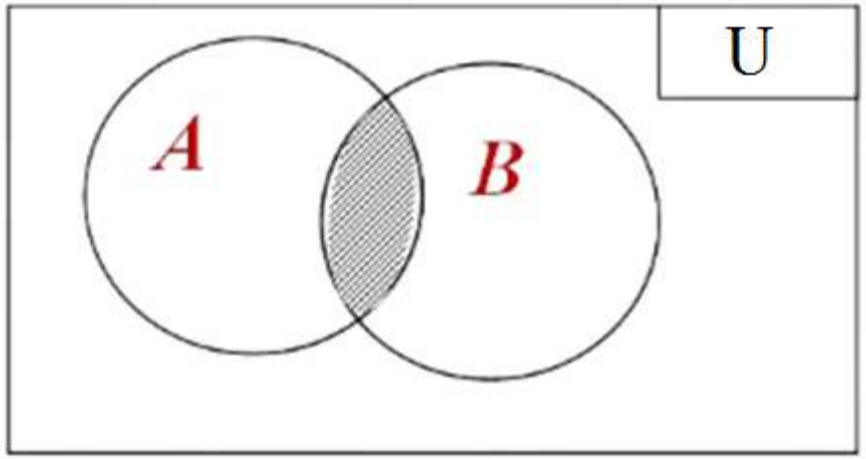
$x \in A$ және $x \in B$

жалған тұжырымдар. Олай болса $A = \varnothing$ және $B = \varnothing$, яғни $A = B = \varnothing$.

Анықтама 5.

A және B жиындарының қиылысуы деп A және B жиындарының екеуіне де тиісті болатын элементтерінен тұратын жиынды айтамыз, белгіленуі: $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$



$\wedge$ –" және "

Мысал 8:

Егер

$A=\{1,2,4,7,8,9\}$,

$B=\{1,3,5,7,8,10\}$

болса, онда

$A \cap B = \{1,7,8\}$

болады.

Теорема 3.

Жиындардың қилысуы үшін келесі тұжырымдар орынды болады:

а) $A \cap A = A$ – қилысудың *идемпотенттілігі*;

б) $A \cap B = B \cap A$ – қилысудың *коммутативтілігі*;

в) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – қилысудың *ассоциативтлігі*;

г) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Теорема 4.

Жиындардың қиылысуы мен бірігуі үшін келесі тұжырымдар орынды болады:

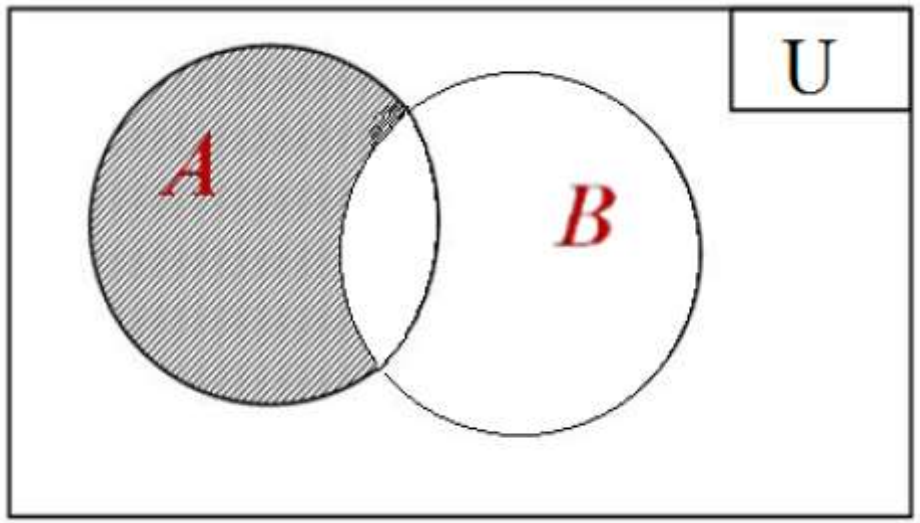
1) $A \cap B \subseteq A,\ A \cap B \subseteq B;$
2) $A \subseteq A \cup B;$
3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$
4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

Дәлелдеу керек.

Анықтама 6.

А және В жиындарының айырмасы деп А жиынының В жиынына тиіссіз элементтерінен тұратын жиынды айтамыз, белгіленуі: $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$



Мысал 9:

Егер

$A=\{1,3,4,7,8,9,10\}$,

$B=\{2,3,4,5,6,7\}$

болса, онда

$A\setminus B=\{1,8,9,10\}$,

$B\setminus A=\{2,5,6\}$

болады.

Жиындардың айырмасы үшін келесі тұжырымдар орынды болады:

1) $A \setminus A = \varnothing$;

2) $A \setminus B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B$;

3) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

4) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Теорема 5 (Морган заңдары).

а) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Дәлелдеу керек.

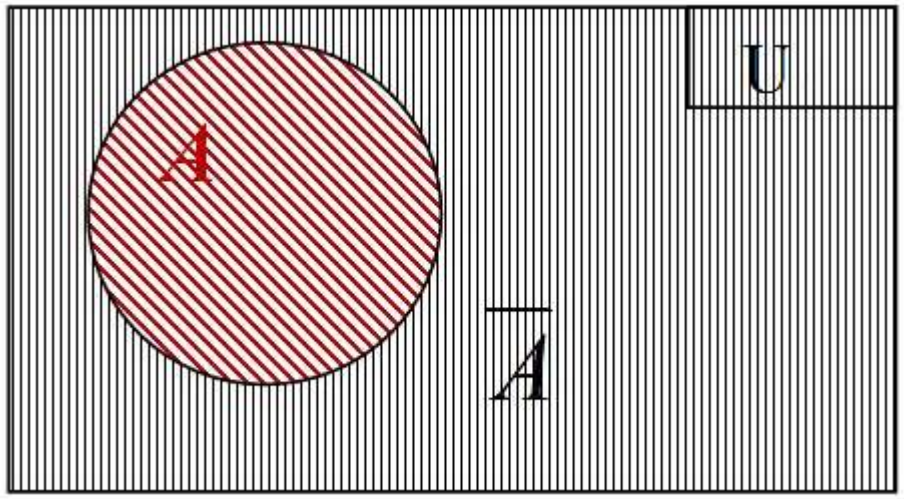
Егер кез келген элемент U жиынына тиісті болса, яғни кез келген жиын U жиынының ішкі жиыны болса, онда U жиыны *универсал/ әмбебап жиын* деп аталады.

Мысал 10:

Сандардың кез келген жиыны R нақты сандар жиынының ішкі жиыны болады, яғни R нақты сандар жиыныны - универсал жиын.

A жиынының *толықтыруы* деп U\A жиынын айтамыз.

A жиынының толықтыруы $\overline{A}$ түрінде белгіленеді:



$$\overline{A} \Leftrightarrow \{x : x \notin A\}$$

Мысал 11:

Егер U – нақты сандар жиыны, яғни $U=R$ және A рационал сандар жиыны, яғни A=Q болса, онда

$\overline{A}$ – иррационал сандар жиыны болады.

Теорема 6.

1) $\overline{\overline{A}} = A;$

2) $\overline{U} = \varnothing;$

3) $\overline{\varnothing} = U.$

Теорема 7 (толықтыру үшін Морган заңдары).

1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};$

2) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}\,.$

Дәлелдеңіз.

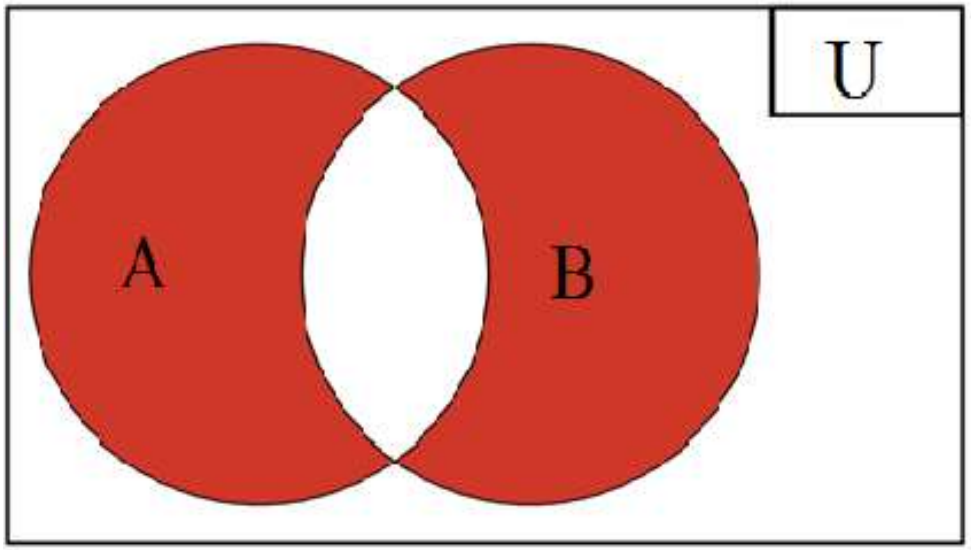
A және B жиындарының симметриялық айырмасы деп

$$A \Delta B = A \oplus B = (A \mid B) \cup (B \mid A)$$

немесе

$$A \Delta B = (A \cup B) \mid (A \cap B)$$

жиынын атаймыз.



Мысал 12:

Егер

$A=\{1,3,4,7,8,9,10\}$,

$B=\{2,3,4,5,6,7\}$

болса, онда

$A \Delta B = \{1,2,5,6,8,9,10\}$

болады.

Теорема 8.

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$$

екенін дәлелдеңіз.

Анықтама 7.

Егер

$a \in A$ және $a \notin B$, $(A|\, B \neq \varnothing)$

$b \in B$ және $b \notin A$, $(B|\, A \neq \varnothing)$

$c \in A$ және $c \in B$ $(A \cap B \neq \varnothing)$

болатындай a, b, c элементтері табылса, онда *А және В жиындары жалпы жағдайда* дейміз, белгіленуі: А◯◯В.

Мысал 13:

A = {1, 2, 3, 4} және B = {2, 4, 6, 8} болсын.

Шешімі:

$1 \in A, 6 \in B$

$\{2,4\} \in A \cap B$

Осылайша, *A* және *B* жиындары жалпы жағдайда.

№	$\cup$	$\cap$
1	(идемпотенттік) $A \cup A=A$	$A \cap A=A$
2	Ауыстырымдылық (коммутативтік) $A \cup B=B \cup A$	$A \cap B=B \cap A$
3	Терімділік (ассоциативтік) $A \cup (B \cup C)=(A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C)=(A \cap B) \cap C$
4	Үлестірімділік (дистрибутивтік) $A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$
5	Жұтылу(сіңіру) $A \cup (A \cap B)=A$	$A \cap (A \cup B)=A$
6	Нөлдік қасиеті $A \cup \varnothing=A$	$A \cap \varnothing=\varnothing$
7	Бірлік қасиеті $A \cup U=U$	$A \cap U=A$
8	Қосалқы принципі (де Морган заңы) $\overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}=\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}$	$\overline{A \cap B}=\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k}=\bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$
9	Екі рет теріске шығару $\overline{\overline{A}}=A$	
10	Толықтыру қасиеті $A \cup \overline{A}=U$	$A \cap \overline{A}=\varnothing$

Мысал 14:

а) Егер

$A \subset B$ және $B \subseteq C$ және $C \subset D$

болса, онда

$A \subseteq D$

тұжырымы орынды ма?

b) Кез келген A, B, C, D үшін

$A \subset B$ және $B \subseteq C$ және $C \subset D$ және $A \subseteq D$

шарттар жиынтығы орынды ма?

Шешімі:

а) $x \in A$ болсын.

$A \subset B$ болғандықтан енгізілу анықтамасынан $x \in B$ болатыны шығады.

$x \in B$ және $B \subseteq C$ болғандықтан $x \in C$.

$x \in C$ және $C \subset D$ болғандықтан $x \in D$.

Демек, $x \in A$ ерікті элементі болғандықтан $x \in D$.

Теориядағы анықтамалардың негізінде

$$A \subseteq D$$

тұжырымының дұрыстығы шығады.

b) Шарттар жиынтығы орынды, ол 1-мысалдан белгілі.

Мысал бола алатын жиындар:

$$A = \{x\},$$

$$B = C = \{x, y\},$$

$$D = \{x, y, z\}.$$

Демек,

$$\{x\} \subset \{x, y\},$$

$$\{x, y\} \subseteq \{x, y\},$$

$$\{x, y\} \subset \{x, y, z\}$$

және $\{x\} \subseteq \{x, y, z\}.$

ҚАЙТАЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. Жиын дегеніміз не? Оны қалай анықтаймыз?
2. Жиын элементі деген ұғымды түсіндіріңіз. Қалай белгіленеді?
3. Жиындарды берудің қандай әдістері бар? Мысалдар келтіріңіз.
4. Бос жиын деген не? Оны қалай белгілейміз? Мысал келтіріңіз.
5. Ішкі жиын анықтамасын беріңіз. Белгілеуін көрсетіңіз.
6. Тең жиындар деп қандай жиындарды айтады? Мысал келтіріңіз.
7. Меншікті (қатаң) ішкі жиын деген не?
8. Шектеулі және шектеусіз жиындарды ажыратып, мысалдар келтіріңіз.



9. Жиынның қуаты (кардиналы) деген не? Шектеулі жиын үшін қалай анықталады?
10. Жиындардың бірігуінің анықтамасын беріңіз. Белгілеуін көрсетіңіз.
11. Жиындардың қиылысуы деген не? Оны қалай белгілейміз?
12. Жиындардың айырмасын түсіндіріңіз. Мысал арқылы көрсетіңіз.
13. Универсал жиын деп қандай жиынды айтады? Мысал келтіріңіз.
14. Толықтауыш жиын деген не? Оны қалай есептейміз?
15. Симметриялық айырманың анықтамасын беріңіз. Оны қалай есептеуге болады?



16. Жиындардың бірігуінің қасиеттерін тізіп, мысалдармен түсіндіріңіз:
    1. Идемпотенттілік
    2. Коммутативтілік
    3. Ассоциативтілік
17. Жиындардың қиылысуының қасиеттерін атаңыз:
    1. Идемпотенттілік
    2. Коммутативтілік
    3. Ассоциативтілік
18. Бірігу мен қиылысудың дистрибутивтілік заңдарын тұжырымдап, мысал келтіріңіз.
19. Морган заңдарын жиындардың айырмасы үшін тұжырымдаңыз.
20. Толықтауыш жиын үшін Морган заңдарын жазыңыз.





21. Жиындардың айырмасының негізгі қасиеттерін атаңыз.
22. Жиындардың симметриялық айырмасының қасиеттерін түсіндіріңіз.
23. Жиындардың арасындағы қатынастарды (ішкі жиын, теңдік, айырмашылық) қалай анықтаймыз?
24. Жиындардың қуаты мен ішкі жиындар саны арасындағы байланысты түсіндіріңіз.
25. Жиындар теориясының қолданбалы мәні неде? Оны қай салаларда қолданамыз?

ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Дискреттік математика және математикалық логика негіздері : оқулық / Ф.Р. Гусманова, Қ.С. Дальбекова, С.Б. Беркімбаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 363, [1] б. ISBN 978-601-330- 339-0 LIBRARY.ENU
2. Байжуманов А.А. Дискреттік математика және математикалық логика : оқулық / А.А. Байжуманов, О.М. Ибрагимов. - Алматы : TechSmith, 2023. - 342, [1] б. : сур., кесте. - Библиогр.: б. 340. - ISBN 978- 601-342-643-3
3. Ерусалимский Я. М. Дискретная математика. Теория и практикум: Учебник для вузов Издательство "Лань", 2025
4. Гашков, С. Б. Дискретная математика : учебник для вузов / С. Б. Гашков. — 3- е изд., испр. и доп. — СанктПетербург : Лань, 2025. — 520 с. — ISBN 978-5-507- 49866-6. — Текст : электронный // Лань : электроннобиблиотечная система.
5. Тишин В. В. Дискретная математика в примерах и задачах. — СПб.: БХВ Петербург, 2008. — 352 с.

Назар аударғаныңызға рақмет!

