

КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАРДЫҢ САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ. МАТЕМАТИКАЛЫҚ КҮТІМ

Орташа мән. Бірнеше санды бір санмен сипаттау керек болған кезде орташа мән ұғымын енгізу қажет болады.

Анықтама 16.1. $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \in N$) сандары берілсін. Осы n санның әрқайсысын қосындыларының мәні өзгермейтіндей етіп алмастыра алатын, яғни

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \bar{x} + \bar{x} + \dots + \bar{x} = n\bar{x}$$

теңдігін қанағаттандыратын $\bar{x}$ саны $x_1, x_2, \dots, x_n$ сандарының *арифметикалық ортасы* деп аталады да және $x_1, x_2, \dots, x_n$ сандарының арифметикалық ортасы

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

санына тең.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ сандары тек бір рет қана кездеспеуі мүмкін. Оларды топтастырып жазайық, x_1 саны b_1 рет, x_2 саны b_2 рет, т.с.с. x_m саны b_m рет кездессін және

$$b_1 + b_2 + \dots + b_m = n.$$

Онда анықтама келесідей беріледі:

Егер әрбір x_k ($k = 1, \dots, m, m \in N$) мәнінің өз b_k «салмағы» бар болса, онда *арифметикалық орта*

$$\bar{x} = \frac{b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_m x_m}{n} = \frac{b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_m x_m}{b_1 + b_2 + \dots + b_m} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_m x_m,$$

санына тең, мұндағы

$$p_k = \frac{b_k}{b_1 + b_2 + \dots + b_m} \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

$b_1, \dots, b_m$ кез келген оң сан. Олар тек оң бүтін болғанда сәйкес x_k мәндерінің кездесу санын көрсетеді.

$(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігі және онда анықталған $\xi: \Omega \mapsto R$ дискретті кездейсоқ шама берілсін.

$\xi: \Omega \mapsto R$ кездейсоқ шамамен анықталған $(\Omega_\xi, F_\xi, P_\xi)$ ықтималдық кеңістігі төмендегі кестемен анықталсын:

$\Omega_\xi = \xi(\Omega)$	x_1	x_2	...	x_m
P_ξ	p_1	p_2	...	p_m

мұндағы

$$p_k = P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x_k\}) \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Анықтама 16.2.

$$M\xi = x_1p_1 + \dots + x_mp_m = \sum_{k=1}^m x_k p_k = \sum_{k=1}^m x_k \sum_{\omega \in \Omega: \xi(\omega)=x_k} P(\{\omega\})$$

саны $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігінде анықталған мәндер жиыны ақырлы болатын $\xi: \Omega \mapsto R$ дискретті кездейсоқ шамасының $M\xi$ математикалық күтімі немесе орташа мәні деп аталады.

$\xi(\omega)$ кездейсоқ шамасы дискретті болғанда Ω_ξ жиыны саналымды да болады. Онда

Анықтама 16.3.

$$M\xi = x_1p_1 + \dots + x_mp_m + \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \sum_{\omega \in \Omega: \xi(\omega)=x_k} P(\{\omega\})$$

саны (бұл қатар жинақталған жағдайда) $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігінде анықталған $\xi: \Omega \mapsto R$ мәндер жиыны саналымды дискретті кездейсоқ шамасының ξ математикалық күтімі немесе орташа мәні деп аталады.

Кездейсоқ шама тек оң мәндер ғана емес, сонымен қатар теріс бүтін сандарды да қабылдауы мүмкін.

$(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігі және онда анықталған $\xi: \Omega \mapsto R$ үзіліссіз кездейсоқ шамасы өзінің $p(x)$ үлестірім тығыздығымен берілсін.

Анықтама 16.4.

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$$

саны (меншіксіз интеграл жинақталған жағдайда) $\xi: \Omega \mapsto R$ үзіліссіз кездейсоқ шамасының ξ математикалық күтімі немесе орташа мәні деп аталады.

Ескерту 16.1. Математикалық күтім кездейсоқ шама мәндеріне тең болмауы да мүмкін.

Бұл жағдайда да кездейсоқ шаманың математикалық күтімі жоқ (кейбір оқулықтарда математикалық күтімі ақырсыз деп атайды).

Кездейсоқ шаманың математикалық күтімі келесі қасиеттерге ие.

16.1⁰. Егер $\xi(\omega) \equiv c$ тұрақты функция болса, онда $M\xi = c$;

16.2⁰. Біртектілігі: кез келген c саны үшін $M(c\xi) = cM\xi$ орындалады;

16.3⁰. Сызықтылығы: кез келген ξ және η кездейсоқ шамалары үшін $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$, яғни қосындының математикалық күтімі математикалық күтімдерінің қосындысына тең;

16.4⁰. $A \in F$ оқиғасы берілсін, онда осы оқиғаның $\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{егер } \omega \in A, \\ 0, & \text{егер } \omega \notin A \end{cases}$ характеристикалық функциясының математикалық күтімі оның ықтималдылығына тең, яғни $M\chi_A = P(A)$;

16.5⁰. Егер $\xi(\omega)$ кездейсоқ шамасы өзара қиылыспайтын $B_l \in \sigma F$ ($l = 1, \dots, k$) оқиғаларында $\xi(\omega) = c_l$ тұрақты болып, B_l оқиғалары үшін $B_1 \cup \dots \cup B_k = \Omega$ орындалса, онда олардың сызықтық комбинациясы болатын $\xi(\omega) = c_1\chi_{B_1}(\omega) + \dots + c_k\chi_{B_k}(\omega)$ кездейсоқ шамасының математикалық күтімі $M\xi = c_1P(B_1) + \dots + c_kP(B_k)$;

16.6⁰. Математикалық күтімнің монотондылығы: $\xi: \Omega \mapsto R$ және $\eta: \Omega \mapsto R$ кездейсоқ шамалары берілсін және әр $\omega \in \Omega$ үшін $\xi(\omega) \leq \eta(\omega)$ теңсіздігі орындалсын, онда $M\xi \leq M\eta$;

16.7⁰. ξ және η кездейсоқ шамалары беріліп және олар тәуелсіз болса, онда олардың $\xi\eta$ көбейтіндісінің математикалық күтімі математикалық күтімдерінің көбейтіндісіне тең болады, яғни $M\xi\eta = M\xi \cdot M\eta$;

16.8⁰. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігі және онда анықталған $\xi: \Omega \mapsto R$ кездейсоқ шамасы, кем дегенде ξ кездейсоқ шамасының $\xi(\Omega)$ мәндер жиынында анықталған $g(x)$ функциясы берілсін. Онда $g(\xi)$ кездейсоқ шамасы дискретті болғанда

$$Mg(\xi) = \sum_{k=1}^m g(x_k)P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x_k\}) = \sum_{k=1}^m g(x_k)p_k,$$

үзіліссіз болғанда

$$Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx$$

теңдіктері орындалады.

16.9⁰. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігінде анықталған $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ екі өлшемді дискретті кездейсоқ шамасы p_{jk} ықтималдылығымен берілсін. Онда $\xi_1(\Omega) \times \xi_2(\Omega)$ жиынында анықталған $g(x_1, x_2)$ кездейсоқ вектор функциясының математикалық күтімі

$$Mg(\xi) = \sum_{j,k} g(\xi_1, \xi_2)p_{jk}$$

санына тең.

Ал егер $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ екі өлшемді кездейсоқ шама үзіліссіз болса, онда

$$Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)p(x, y)dxdy$$

санына тең.

16.10⁰. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігінде анықталған $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ дискретті кездейсоқ вектор $p_{j_1 \dots j_n} = P(\{\omega \in \Omega: \xi_1(\omega) = x_{j_1}, \dots, \xi_n(\omega) = x_{j_n}\})$ ықтималдықтарымен берілсін (x_k мәндері $\xi_k(\omega)$ ($k = 1, \dots, n$) кездейсоқ шамасының барлық мүмкін мәндерін қабылдайды). $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ кездейсоқ векторының мәндер жиынында анықталған $g(x_1, \dots, x_n)$ кездейсоқ вектор функциясының математикалық күтімі

$$Mg(\xi) = \sum_{x_1, \dots, x_n} g(x_1, \dots, x_n)p_{j_1 \dots j_n}$$

санына тең.

$(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдылық кеңістігінде анықталған $\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$ кездейсоқ шамаларының бірлескен n – өлшемді үлестірім тығыздығы $p(x_1, \dots, x_n)$ болсын. $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ кездейсоқ векторының мәндер жиынында анықталған n айнымалы $g(x_1, \dots, x_n)$ кездейсоқ вектор функциясының математикалық күтімі

$$Mg\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \dots, x_n)p(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n$$

санына тең.

ӨЗІН-ӨЗІ ТЕКСЕРУ СҰРАҚТАРЫ.

1. Орташа мән анықтамасын беріңіз.
2. Математикалық күтім анықтамасын беріңіз.
3. Математикалық күтім ққасиеттерін беріңіз.