

КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР

Анықтама 12.1. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігі берілсін. Ω жиынында анықталған нақты мәнді $\xi : \Omega \rightarrow R$ өлшемді функциясы, яғни Ω жиынындағы әрбір ω (элементар оқиғаға) элементіне нақты бір санды сәйкес қоятын және кез келген a нақты саны үшін $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) > a\} \in \sigma F$ шарты орындалатын ξ ережесі *кездейсоқ шама* деп аталады.

Анықтама 12.2. ξ кездейсоқ шамасының мәндер жиыны $\Omega_\xi = \xi(\Omega) = \{\xi(\omega) : \omega \in \Omega\}$ ақырлы немесе саналымды болса, яғни

$$\sum_i P(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_i\}) = 1$$

болатындай $\{x_i\}_i$ сандарының ақырлы немесе саналымды жиыны табылса, онда ξ *дискретті кездейсоқ шама* деп аталады.

Бірінші жолында кездейсоқ шаманың барлық мүмкін мәндері x_i , екінші жолында олардың сәйкес ықтималдықтары

$$p_i = P(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_i\}) = \sum_{\omega: \omega \in \Omega, \xi(\omega) = x_i} P(\{\omega\})$$

орналасқан дискретті кездейсоқ шаманың *үлестірім қатары* деп аталатын екі жолдық кесте түрінде беру ыңғайлы:

Ω_ξ ақырлы жиын болғанда ξ кездейсоқ шамасының үлестірім қатары

ξ	x_1	x_2	...	x_m
p_i	p_1	p_2	...	p_m

Ω_ξ саналымды жиын болғанда ξ кездейсоқ шамасының үлестірім қатары

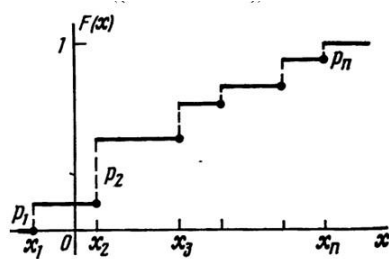
ξ	x_1	x_2	...	x_m	...
p_i	p_1	p_2	...	p_m	...

Ескерту 12.1. Дискретті кездейсоқ шаманы $p_i = P(\{\omega : \xi(\omega) = x_i\})$ ықтималдықтары үшін $\sum_i p_i = 1$ теңдігінің орындалуы $\{\omega : \xi(\omega) = x_i\}$ оқиғалардың үйлесімсіздігі мен толық топ құруынан шығады.

Анықтама 12.5. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы берілсін. $x \in R$ нақты саны үшін $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\}$ оқиғасының ықтималдылығына тең болатын $F(x)$ функциясы ξ кездейсоқ шамасының *үлестірім функциясы* деп аталады, яғни

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\}).$$

Ескерту 12.2. $F(x) = P(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\})$ мағыналы болуы, яғни $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\}$ оқиға болуы ξ кездейсоқ шамасының өлшемді функция болатындығынан шығады.



12.1-сурет

Дискретті кездейсоқ шаманың үлестірім функциясы үзілісті, баспалдақты функция болады (12.1-сурет).

Теорема 12.1. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы берілсін. Онда оның $F(x)$ үлестірім функциясы келесі қасиеттерге ие:

1. Кез келген x нақты саны үшін $0 \leq F(x) \leq 1$.
2. $F(x)$ кемімейтін функция (кез келген $x_1 < x_2$ нақты сандары үшін $F(x_1) \leq F(x_2)$).
3. $F(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) := \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
4. Кез келген $x_1 < x_2$ нақты сандары үшін $P(\{\omega \in \Omega : x_1 \leq \xi(\omega) < x_2\}) = F(x_2) - F(x_1)$.
5. $F(x)$ функциясы әр нүктеде сол жақты үзіліссіз, яғни $F(x) = F(x-0) := \lim_{t \rightarrow x-0} F(t)$.

Ескерту 12.3. 12.1-теоремадағы 5-қасиет орындалуы үшін $F(x)$ функциясының сол жақты шегі мағыналы болуы керек.

Сол жақты үзіліссіз, кемімейтін және $F(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) := \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ теңдіктерін қанағаттандыратын кез келген функция қандай да бір кездейсоқ шаманың үлестірім функциясы болады. Сондықтан осы шарттарды қанағаттандыратын кез келген $F(x)$ функциясын ешқандай да кездейсоқ шамаға байламай *үлестірім функциясы* деп атайды.

Анықтама 12.6. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы берілсін. Егер ξ кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$$

түрінде жазуға болатындай теріс емес $p(t)$ функциясы табылса, онда ξ кездейсоқ шамасы *абсолютті үзіліссіз кездейсоқ шама* деп, ал $p(t)$ функциясы оның *үлестірім тығыздығы* деп аталады.

Ескерту 12.3. 12.6 анықтамасында Лебег мағынасындағы интеграл қолданылған.

Үлестірім тығыздығы $p(x)$ үзіліссіз болатын барлық нүктелерде $F(x)$ үлестірім функциясының туындысы бар болады және

$$p(x) = F'(x)$$

теңдігі орындалады.

Теорема 12.2. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ абсолютті үзіліссіз кездейсоқ шамасы берілсін. Онда оның $p(x)$ үлестірім тығыздық функциясы келесі қасиеттерге ие:

1. Кез келген x үшін $p(x) \geq 0$;
2. $P(\{\omega \in \Omega : x_1 \leq \xi(\omega) \leq x_2\}) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$;
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$;

4. $\Delta x > 0$ үшін $P(\{\omega \in \Omega: x \leq \xi(\omega) \leq x + \Delta x\}) \approx p(x)\Delta x$;

5. $\forall x \in R: P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x\}) = 0$.

Кездейсоқ шамалардың ішінде дискретті де емес, абсолютті үзіліссіз де емес кездейсоқ шамалар бар.

ӨЗІН-ӨЗІ ТЕКСЕРУ СҰРАҚТАРЫ.

1. Кездейсоқ шама анықтамасын беріңіз.
2. ξ дискретті кездейсоқ шама анықтамасын беріңіз.
3. Кездейсоқ шаманың үлестірім қатары дегеніміз не?
4. ξ кездейсоқ шамасының үлестірім функциясының анықтамасын беріңіз.
5. Үлестірім функциясы қандай қасиеттерге ие?
6. $(\Omega, \sigma F, P)$ ықтималдық кеңістігінде анықталған ξ кездейсоқ шамасы абсолютті үзіліссіз кездейсоқ шама болуының анықтамасын беріңіз.
7. Үлестірім тығыздығы қандай қасиеттерге ие?