ТӘЖІРИБЕЛІК САБАҚ №7

ЖАЗЫҚ ФИГУРАНЫҢ АУДАНЫН ЕСЕПТЕУ. ҚИСЫҚТЫҢ ДОҒАСЫНЫҢ ҰЗЫНДЫҒЫН ТАБУ. ДЕНЕНІҢ КӨЛЕМІН ЕСЕПТЕУ. АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫҢ ЭКОНОМИКАДА ҚОЛДАНЫЛУЫ.

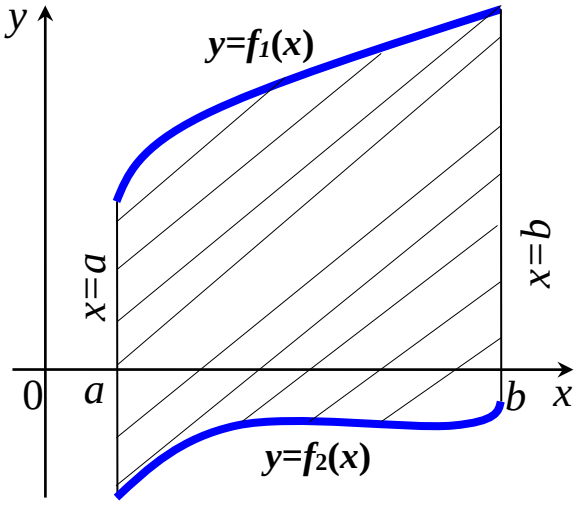
Мысал 1: $y=2x$ және $y=3-x^2$ функцияларының графиктерімен шектелген фигураның ауданын есептеңіз.

Шешімі:

a) Жоғарыдан $y=f_1(x)$, төменнен $y=f_2(x)$ үзіліссіз функцияларының графиктерімен, бүйірінен $x=a$ және $x=b$ түзулерімен шектелген фигураның ауданы (1-сурет)

$$S=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx \quad (1)$$

формуласымен табылады.

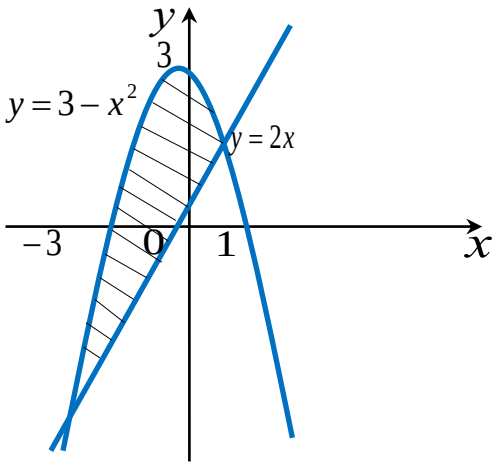


1-сурет

b) Екі қисықтың қиылысу нүктесінің абциссасын тапсақ:

$$\begin{cases} y=2x \\ y=3-x^2 \end{cases} \Rightarrow 2x=3-x^2 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=-3.$$

$y=2x$ түзуі мен $y=3-x^2$ параболасының графиктерін тұрғызамыз.



$$S=\left|S=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx\right|=\int_{-3}^{1}(3-x^2-2x)dx=$$

$$=\left(3x-\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{-3}^{1}=$$

$$=\left(3\cdot 1-\frac{1^3}{3}-1^2\right)-\left(3\cdot(-3)-\frac{(-3)^3}{3}-(-3)^2\right)=\frac{32}{3}.$$

c) Жауабы: $S=\frac{32}{3}$.

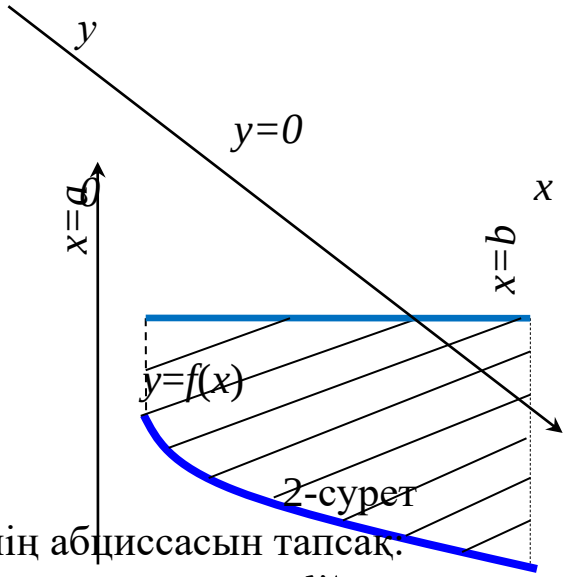
Мысал 2: $y=-x^2, x=2$ функциялары және OX өсімен шектелген фигураның ауданын есептеңіз.

Шешімі:

a) [a,b] сегментінде үзіліссіз оң емес $y=f(x)$ функциясының графигімен, OX өсімен, $x=a$ және $x=b\ (a<b)$ түзулерімен шектелген фигураның ауданы (2-сурет)

$$S=-\int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

формуласымен табылады. (2) формуласы (1) формуласының $f_1(x)=0,\ f_2(x)=f(x)$ болғандағы дербес жағдайы (фигура жоғарғыдан $y=0$, төменнен $y=f(x)$ сызықтарымен шектелген).

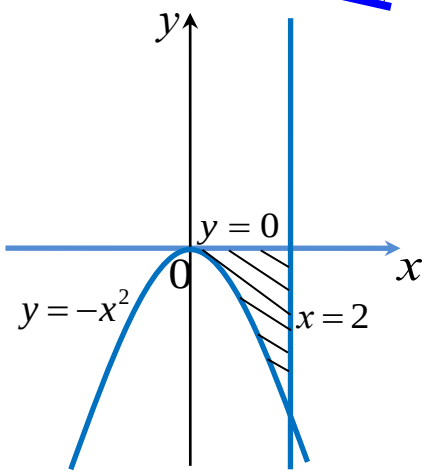


2-сурет

b) Екі қисықтың қиылысу нүктесінің абциссасын тапсақ:

$$\begin{cases} y=-x^2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow -x^2=0 \Rightarrow x_{1,2}=0.$$

$y=-x^2, x=2$ функциялары және OX өсінің графиктерін тұрғызамыз.



Ізделінді аудан

$$S=\left|S=-\int_a^b f(x)dx\right|=-\int_0^2(-x^2)dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3}.$$

c) Жауабы: $S=\frac{8}{3}$.

Мысал 3: OX өсімен

$$\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \\ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$$

циклоидасының бір тармағымен шектелген фигураның ауданын есептеңіз.

Шешімі:

a) Егер қисық сызықты трапецияны шектейтін $y = f(x)$ қисығы $[\alpha, \beta]$ сегментінде теріс емес $y(t)$ функциясы мен бірсарынды, үзіліссіз дифференциалданатын және $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$ теңдіктерін қанағаттандыратын $x(t)$ функциялары арқылы

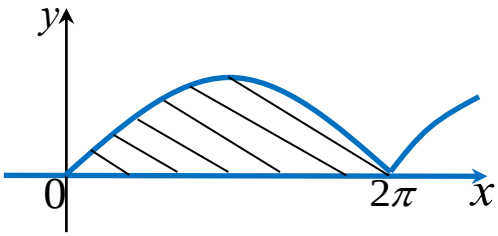
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ \alpha \le t \le \beta \end{cases}$$

параметрлік түрінде берілсе, онда бұл *қисық сызықты трапецияның ауданы*

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt \qquad (3)$$

формуласымен есептелінеді.

а) Циклоидасының бір тармағының графигін тұрғызамыз.



$$S = \left| \begin{array}{l} S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt \\ x = 2(t - \sin t) \\ dx = 2(1 - \cos t)dt \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} 2(1-\cos t)2(1-\cos t)dt = 4\int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt = 4\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)dt =$$

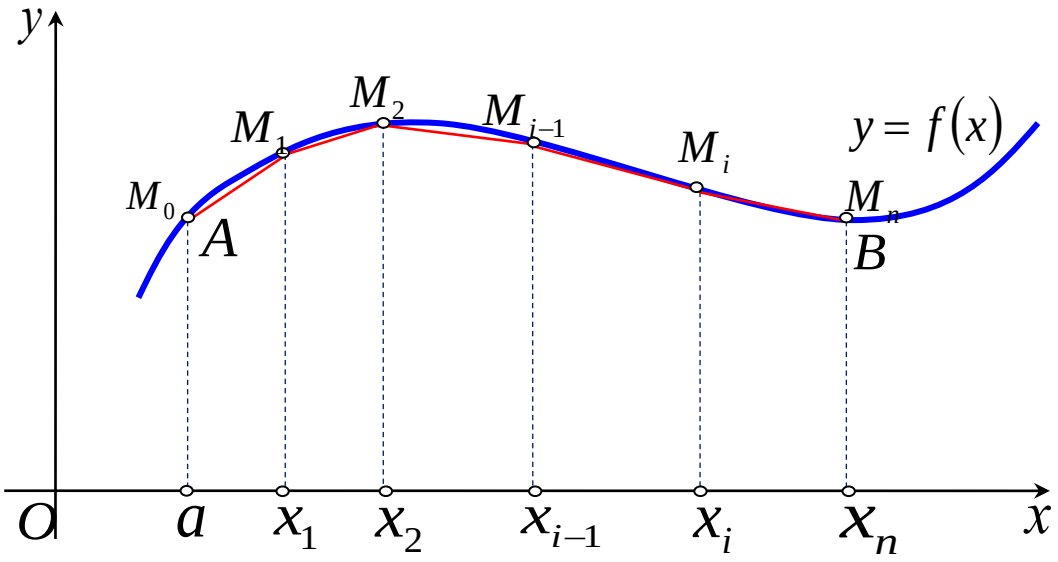
$$= 4\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\right) = \left(4t - 8\sin t + 2t + \sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 8\pi + 4\pi = 12\pi.$$

c) Жауабы: $S = 12\pi$.

Мысал 4: $y = \frac{3}{4}x - 1$ қисығының $A(0;-1), B(4;2)$ нүктелерімен шектелген доғасының ұзындығын табыңыз.

Шешімі:

а) $x \in [a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданатын $y = f(x)$ функциясы графигінің $\overset{\smile}{AB}$ доғасының L ұзындығын табу үшін $A = M_0(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n) = B$ нүктелері арқылы n бөлікке бөлеміз де, $M_0M_1M_2 \ldots M_n$ сынық сызығын тұрғызамыз (21.3-сурет).



3-сурет

$\Delta(M_{i-1}, M_i)$ сынық сызықтың $M_{i-1}M_i$ кесіндісінің ұзындығы $(i = 1,2,...,n)$, ал γ сынық сызықтың кесінділерінің ұзындықтарының ең үлкені болсын:

$$\Delta(M_{i-1}, M_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2};$$

$$\gamma = \max_{i=\overline{1,n}} \{\Delta(M_{i-1}, M_i)\}.$$

Сынық сызықтың ұзындығы

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta(M_{i-1}, M_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

қосындысына тең болады.

Анықтама 1: $\overset{\smile}{AB}$ *доғасының ұзындығы* деп $\lim\limits_{\gamma \to 0} L_n$ шегін айтамыз:

$$L = \lim_{\gamma \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}.$$

Ұзындығы бар (көрсетілген шек бар) қисық *түзетілетін қисық* деп аталады.

Соңғы теңдіктен, Лагранж теоремасы бойынша $[x_{i-1}, x_i]$ аралығында $y_i - y_{i-1} = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ теңдігі орынды болатын бір ξ_i нүктесі табылатындықтан

$$L = \lim_{\gamma \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + f'^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1})^2} = \lim_{\gamma \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \lim_{\gamma \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$$

теңдігін аламыз, мұндағы $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Бұдан, $\gamma \to 0 \Leftrightarrow \lambda = \max_{i=\overline{1,n}} \Delta x_i \to 0$ және $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$ қосындысының $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ функциясының $[a,b]$ сегментіндегі интегралдық қосындысы екенін ескерсек,

$$L = \lim_{\gamma \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

теңдігі шығады. Демек,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx. \qquad (4)$$

b) Ізделінді доғаның ұзындығы

$$L = \left| \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx \right| = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}dx = \int_0^4 \sqrt{\frac{16+9}{16}}dx = \frac{5}{4}\int_0^4 dx = \frac{5}{4}x\Big|_0^4 = 5.$$

c) Жауабы: $L = 5$.

Мысал 5: $\begin{cases} x = 2cost \\ y = 2\sin t \\ t \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$ доғасының ұзындығын табыңыз.

Шешімі:

a) $\overset{\smile}{AB}$ доғасы $x(t), y(t)$ үзіліссіз дифференциалданатын функциялар арқылы

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ t \in [\alpha, \beta] \end{cases}$$

параметрлік түрде берілсе, онда $\overset{\smile}{AB}$ доғасы түзетілетін болады да оның ұзындығы

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt. \qquad (5)$$

формуласымен табылады.

b) Доғаның ұзындығы

$$L=\left|\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt\right|=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2}\,dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t}\,dt=$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}dt=2t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=2\frac{\pi}{2}=\pi.$$

c) Жауабы: $L=\pi.$

Мысал 6: $\rho=a(1+\cos\varphi)$ кардиоидасының ұзындығын табыңыз.

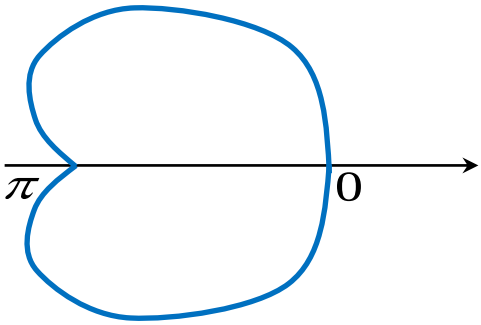
Шешімі:

a) Егер $\overset{\smile}{AB}$ доғасы полярлық координаталарда үзіліссіз дифференциалданатын $\rho=f(\varphi),\quad \varphi\in[\alpha,\beta]$ функциясы арқылы берілсе, онда ол түзетілетін қисық болады да, оның ұзындығы

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(f(\varphi))^2+(f'(\varphi))^2}\,d\varphi. \qquad (6)$$

формуласымен табылады.

b) ρ функциясы жұп, координаталық өске симметриялы, оның доғасының ұзындығының жартысын тауып оны екі есе көбейтсек жеткілікті:



$$L=\left|\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(f(\varphi))^2+(f'(\varphi))^2}\,d\varphi\right|=$$

$$=2\int_{0}^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2a\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi=2a\int_{0}^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi=$$

$$=2\sqrt{2}a\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi=2\sqrt{2}a\int_{0}^{\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=4a\int_{0}^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=$$

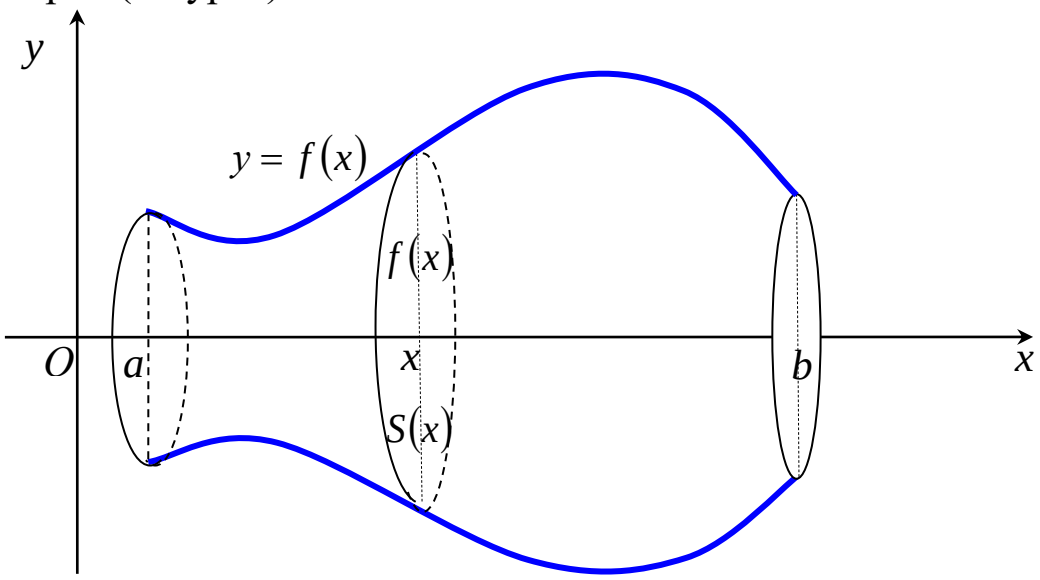
$$=2\cdot 4a\int_{0}^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right)=8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_{0}^{\pi}=8a\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=8a.$$

c) Жауабы: $L=8a.$

Мысал 7: $y=1-x^2$ және $y=0$ сызықтарымен шектелген фигураны OX өсінен айналдырғанда пайда болатын айналу денесінің көлемін табыңыз.

Шешімі:

а) Жоғарғыдан $y=f(x)$ үзіліссіз функциясының графигімен, төменнен OX өсімен, бүйірлерінен $x=a, x=b\,(a<b)$ түзулерімен шектелген қисық сызықты трапецияны OX өсінен айналдырғанда пайда болған айналу денесінің V көлемін табу керек (4-сурет).



4-сурет

Дене айналу денесі болғандықтан, оның x нүктесіндегі көлденең қимасы радиусы $f(x)$ санына тең болатын дөңгелек болады да, қиманың ауданы

$$S(x)=\pi R^2=\pi f^2(x)$$

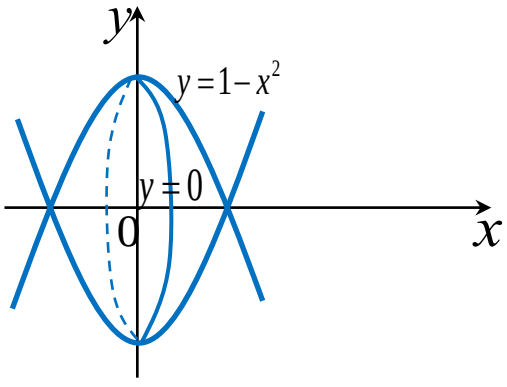
болады. Олай болса

$$V=\int_a^b S(x)dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Сонымен айналу денесінің көлемі

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

формуласымен табылады.



b) $1-x^2=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm1$ функциясы жұп, координаталық OY өсіне симметриялы, оның доғасының ұзындығының жартысын тауып оны екі есе көбейтсек жеткілікті:

$$V=\left|\pi\int_a^b f^2(x)dx\right|=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^2dx=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-2x^2+x^4\right)dx=\pi\left(x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=$$

$$=\pi\left(1-(-1)-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)=\pi\left(2-\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\right)=\frac{16}{15}\pi.$$

c) Жауабы: $V=\frac{16}{15}\pi.$

Мысал 8: $x=\sqrt{y+2},\ x=0,\ y=2$ сызықтарымен шектелген фигураны OY өсінен айналдырғанда пайда болатын айналу денесінің көлемін табыңыз.

Шешімі:

a) Сонымен OY өсінен айналу денесінің көлемі

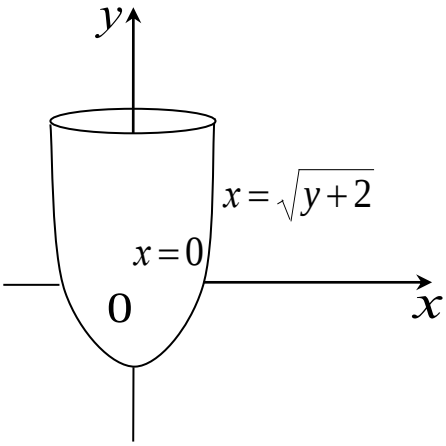
$$V=\pi\int_a^b x^2(y)dy$$

формуласымен табылады.

b) $0=\sqrt{y+2}\Rightarrow 0=y+2,\ y=-2$

$$V=\left|V=\pi\int_a^b x^2(y)dy\right|=\pi\int_{-2}^{2}(y+2)dy=$$

$$=\pi\left(\frac{y^2}{2}+2y\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\pi\left(\frac{4}{2}-\frac{4}{2}+2\cdot2+2\cdot2\right)=8\pi.$$



c) Жауабы: $V=8\pi.$