ТӘЖІРИБЕЛІК САБАҚ №14

АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫҢ АНЫҚТАМАСЫ. АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ. НЬЮТОН – ЛЕЙБНИЦ ФОРМУЛАСЫ. АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДА АЙНЫМАЛЫНЫ АЛМАСТЫРУ ӘДІСІ. АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДА БӨЛІКТЕП ИНТЕГРАЛДАУ. МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДАР.

Бұл тараудың есептерін шығару үшін 12-ші тәжірибелік сабақта берілген негізгі интегралдар кестесін білу қажет.

Ньютон – Лейбниц формуласы.

Теорема 1 (Ньютон - Лейбниц теоремасы).

Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және $y = F(x)$ функциясы оның осы кесіндідегі алғашқы функциясы болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

теңдігі орынды болады.

Мысал 1: Анықталған интегралды есептеңіз: $\int_{-1}^{3}(5x^4 + 2)dx.$

Шешімі:

a) Анықталған интегралды (1) Ньютон – Лейбниц формуласымен есептеу үшін негізгі интегралдар кестесінен $\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ және $\int du = u + c$ формулаларын қолданамыз.

b) $$\int_{-1}^{1}(5x^4 + 2)dx = \left(5\frac{x^5}{5} + 2x\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(x^5 + 2x\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(1^5 + 2\right) - \left((-1)^5 + 2(-1)\right) = 6.$$

c) Жауабы: 6.

Мысал 2: Анықталған интегралды есептеңіз: $\int_0^1 e^{17x}dx.$

Шешімі:

a) Анықталған интегралды (1) Ньютон – Лейбниц формуласымен есептеу үшін негізгі интегралдар кестесінен $\int e^u du = e^u + c$ формуласын қолданамыз.

b) $\int_0^1 e^{17x} dx = \int_0^1 e^{17x} d(17x) = \frac{1}{17} e^{17x} \Big|_0^1 = \frac{1}{17}(e^{17} - 1).$

c) Жауабы: $\frac{1}{17}(e^{17} - 1).$

Мысал 3: Анықталған интегралды есептеңіз: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x dx.$

Шешімі:

a) Анықталғанинтегралды (1) Ньютон – Лейбниц формуласымен есептеу үшін негізгі интегралдар кестесінен $\int \sin u \, du = -\cos u + c$ формуласын қолданамыз.

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x d(3x) = -\frac{1}{3} \cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{1}{3}.$

c) Жауабы: $\frac{1}{3}.$

Мысал 4: Анықталған интегралды есептеңіз: $\int_0^1 \frac{dx}{2 + x^2}.$

Шешімі:

a) Анықталғанинтегралды (1) Ньютон – Лейбниц формуласымен есептеу үшін негізгі интегралдар кестесінен $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + c$ формуласын қолданамыз.

b) $\int_0^1 \frac{dx}{2 + x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{\left(\sqrt{2}\right)^2 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{x}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(arctg \frac{1}{\sqrt{2}} - arctg 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$

c) Жауабы: $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$

Мысал 5: Анықталған интегралды есептеңіз: $\int_0^1 \frac{dx}{9x + 5}.$

Шешімі:

a) Анықталғанинтегралды (1) Ньютон – Лейбниц формуласымен есептеу үшін негізгі интегралдар кестесінен $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$ формуласын қолданамыз.

b) $\int_0^1 \frac{dx}{9x+5} = \frac{1}{9}\int_0^1 \frac{d(9x+5)}{9x+5} = \frac{1}{9}\ln(9x+5)\Big|_0^1 = \frac{1}{9}(\ln 14 - \ln 5) = \frac{1}{9}\ln\frac{14}{5}.$

c) Жауабы: $\frac{1}{9}\ln\frac{14}{5}$.