ТӘЖІРИБЕЛІК САБАҚ №13

РАЦИОНАЛ ӨРНЕКТЕРДІҢ ИНТЕГРАЛДАНУЫ. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ӨРНЕКТЕРДІҢ ИНТЕГРАЛДАНУЫ. ИРРАЦИОНАЛ ӨРНЕКТЕРДІҢ ИНТЕГРАЛДАНУЫ.

Бұл тараудың есептерін шығару үшін 12-ші тәжірибелік сабақта берілген дифференциалдар және негізгі интегралдар кестесін білу қажет.

Бөліктеп интегралдау әдісі

$u=u(x)$ және $v=v(x)$ функциялары үзіліссіз туындылары бар функциялар болсын. Онда $d(uv)=udv+vdu.$ Бұл теңдіктің екі жағын да интегралдасақ,

$$\int d(uv)=\int udv+\int vdu$$

немесе

$$\int udv=uv-\int vdu. \qquad (1)$$

Бұл формула *бөліктеп интегралдау формуласы* деп аталады. Бөліктеп интегралдау формуласын қолданғанда интеграл астындағы өрнекті udv көбейтіндісі ретінде қарастырамыз да u функциясын $\int vdu$ интегралы $\int udv$ интегралына қарағанда интегралдауға қолайлы болатындай етіп таңдап аламыз.

Кейбір бөліктеп интегралданатын интегралдар:

1. $\int P(x)e^{kx}dx, \int P(x)\sin kxdx, \int P(x)\cos kxdx$ түріндегі интегралдарда, мұндағы $P(x)$- көпмүшелік, $u=P(x)$ деп, ал dv ретінде интеграл астындағы қалған көбейткіштерді алу керек.
2. $\int P(x)\arcsin xdx, \int P(x)\arccos xdx, \int P(x)\ln xdx,$ $\int P(x)arctgxdx, \int P(x)arcctgxdx$ түріндегі интегралдарда $P(x)dx=dv$ деп, ал u ретінде интеграл астындағы қалған көбейткішті алу керек.
3. $\int e^{ax}\sin bxdx, \int e^{ax}\cos bxdx$ түріндегі интегралдар бөліктеп интегралдау әдісін екі рет қолдану арқылы интегралдау есебін

осы интегралға қарағанда сызықтық теңдеуді шешу есебіне келтіру арқылы табылады. Бұл арада бірінші ретте u функциясы ретінде көрсеткіштік (тригонометриялық) функция алынса, екінші ретте де көрсеткіштік (тригонометриялық) функция алынуы керек.

Мысал 1: $\int xe^{\sqrt{3}x}dx$ интегралын бөліктеп интегралдау әдісімен табу керек.

Шешімі:

a) Интеграл астындағы өрнекте x бірмүшелігі және $e^{\sqrt{3}x}$ көрсеткіштік функциясының көбейтіндісі берілгендіктен бірінші ережеге сүйеніп (1) бөліктеп интегралдау формуласын қолданамыз.

b) $$\int xe^{\sqrt{3}x}dx = \left| \begin{array}{l} \int udv = uv - \int vdu \\ u = x, \quad dv = e^{\sqrt{3}x}dx \\ du = dx, \quad v = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}x} \end{array} \right| = \frac{x}{\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}x} - \frac{1}{\sqrt{3}}\int e^{\sqrt{3}x}dx =$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}x} - \frac{1}{3}e^{\sqrt{3}x} + c.$$

c) Жауабы: $\frac{x}{\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}x} - \frac{1}{3}e^{\sqrt{3}x} + c.$

Мысал 2: $\int (x^2+4)\ln x dx$ интегралын бөліктеп интегралдау әдісімен табу керек.

Шешімі:

a) Интеграл астындағы өрнекте x^2+4 екімүшелігі және $\ln x$ логарифмдік функциясының көбейтіндісі берілгендіктен екінші ережеге сүйеніп (1) бөліктеп интегралдау формуласын қолданамыз.

b) $$\int\left(x^2+4\right)\ln x\,dx=\left|\begin{array}{l}\int u\,dv=uv-\int v\,du\\ u=\ln x,\quad dv=\left(x^2+4\right)dx\\ du=\dfrac{dx}{x},\quad v=\dfrac{x^3}{3}+4x\end{array}\right|=\left(\frac{x^3}{3}+4x\right)\ln x-\int\left(\frac{x^3}{3}+4x\right)\frac{dx}{x}=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+4x\right)\ln x-\int\left(\frac{x^2}{3}+4\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+4x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}-4x+c\,.$$

c) Жауабы: $\left(\frac{x^3}{3}+4x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}-4x+c.$

Мысал 3: $\int(6x-8)\sin 3x\,dx$ интегралын бөліктеп интегралдау әдісімен табу керек.

Шешімі:

a) Интеграл астындағы өрнекте $6x-8$ үшмүшелігі және $\sin 3x$ тригонометриялық функциясының көбейтіндісі берілгендіктен бірінші ережеге сүйеніп (1) бөліктеп интегралдау формуласын қолданамыз.

b) $$\int(6x-8)\sin 3x\,dx=\left|\begin{array}{l}\int u\,dv=uv-\int v\,du\\ u=6x-8,\quad dv=\sin 3x\,dx\\ du=6dx,\qquad v=-\dfrac{1}{3}\cos 3x\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{3}(6x-8)\cos 3x-\frac{6}{-3}\int\cos 3x\,dx=-\frac{1}{3}(6x-8)\cos 3x+\frac{2}{3}\sin 3x+c.$$

c) Жауабы: $-\frac{1}{3}(6x-8)\cos 3x+\frac{2}{3}\sin 3x+c.$

Мысал 4: $\int\arccos x\,dx$ интегралын бөліктеп интегралдау әдісімен табу керек.

Шешімі:

a) Интеграл астындағы өрнекте жасырын түрде $x^0=1$ бірмүшелігі және $\arccos x$ кері тригонометриялық функциясының көбейтіндісі берілгендіктен екінші ережеге сүйеніп (1) бөліктеп интегралдау формуласын қолданамыз.

b) $$\int \arccos x dx = \left| \begin{array}{ll} \int u dv = uv - \int v du & \\ u = \arccos x, & dv = dx \\ du = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & v = x \end{array} \right| = x\arccos x + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\arccos x - \frac{1}{2}\int \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(1-x^2\right) = x\arccos x - \frac{1}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c =$$

$$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + c.$$

c) Жауабы: $x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + c.$