ТӘЖІРИБЕЛІК САБАҚ №12

АЛҒАШҚЫ ФУНКЦИЯ. АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛ ҰҒЫМЫ. АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ. НЕГІЗГІ ИНТЕГРАЛДАР КЕСТЕСІ. ИНТЕГРАЛДАУДЫҢ НЕГІЗГІ ӘДІСТЕРІ. АЙНЫМАЛЫНЫ АУЫСТЫРУ ӘДІСІН ҚОЛДАНЫП ИНТЕГРАЛДАУ. БӨЛІКТЕП ИНТЕГРАЛДАУ ӘДІСІ.

Бұл тараудың есептерін шығару үшін дифференциалдар және негізгі интегралдар кестесін білу қажет.

Дифференциалдар кестесі.

1. $d(c)=0$
2. $d(u^{\alpha})=\alpha u^{\alpha-1}du, \quad \alpha \in R$
3. $d(a^{u})=a^{u}\ln a du$
4. $d(e^{u})=e^{u}du$
5. $d(\log_a u)=\dfrac{du}{u\ln a}$
6. $d(\ln u)=\dfrac{du}{u}$
7. $d(\sin u)=\cos u du$
8. $d(\cos u)=-\sin u du$
9. $d(tgu)=\dfrac{du}{\cos^2 u}$
10. $d(ctgu)=-\dfrac{du}{\sin^2 u}$
11. $d(\arcsin u)=\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
12. $d(\arccos u)=-\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
13. $d(arctgu)=\dfrac{du}{1+u^2}$
14. $d(arcctgu)=-\dfrac{du}{1+u^2}$
15. $d(shu)=chudu$
16. $d(chu)=shudu$
17. $d(thu)=\dfrac{du}{ch^2 u}$

18. $d(cthu)' = -\dfrac{du}{sh^2 u}$

Негізгі интегралдар кестесі.

Дифференциалдық есептеулердің негізгі формулаларынан шығатын интегралдар кестесін қолданамыз:

1. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1) \quad \left(\int du = u + c\right)$
2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c$
3. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c$
4. $\int e^u du = e^u + c$
5. $\int \sin u\, du = -\cos u + c$
6. $\int \cos u\, du = \sin u + c$
7. $\int tg\, u\, du = -\ln|\cos u| + c$
8. $\int ctg\, u\, du = \ln|\sin u| + c$
9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tg\, u + c$
10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctg\, u + c$
11. $\int sh u du = ch u + c$
12. $\int ch u du = sh u + c$
13. $\int \dfrac{du}{ch^2 u} = th u + c$
14. $\int \dfrac{du}{sh^2 u} = -cth u + c$
15. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\dfrac{u}{2}\right| + c$
16. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + c$
17. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + c$

18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c$

19. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + c$

20. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c$

21. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$

22. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + c$

23. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c$

Интегралды айнымалыны дифференциалтаңбасыныңастына енгізуарқылы табу.

Айнымалыны дифференциалтаңбасыныңастынаенгізуәдісі

$$\int f(g(x))d(g(x)) = F(g(x)) + c. \qquad (1)$$

теңдігімен негізделеді, яғни интеграл атындағы функцияны $f(g(x))d(g(x))$ түріне келтіру қажет. Сондықтан жоғарғыда келтірілген *дифференциалдар* және*негізгі интегралдар кестесін* білу қажет.

Дифференциал таңбасының астына енгізу арқылы интегралдарды анықтау ережесі:

- интеграл таңбасының астындағы функцияны және оның бір көбейткішінің (бөлігінің) дифференциалы интеграл астындағы өрнекті бастапқы қалпына келтіретіндей таңдау керек;
- сол көбейткішті d дифференциал белгісінің астына жазып, одан дифференциал тауып, қажетті тұрақты көбейткіштің орнын толтыру керек;
- негізгі интегралдар кестесін қолданып интегралды табу керек.

Интегралдыайнымалыны ауыстыру әдісін қолданып табу.

Айнымалыны ауыстыру әдісін қолданып интегралдау интегралға жаңа айнымалы енгізуге негізделген. Жаңа айнымалы

енгізу негізінде берілген интеграл жаңа интегралға, яғни кестелік немесе кестелік интегралға келтірілетін интегралға көшеді.

$\int f(x)dx$ интегралын табу қажет болсын. $x=\varphi(t)$ жаңа айнымалысын енгіземіз, мұндағы $\varphi(t)$ - үзіліссіз туындысы бар функция. Онда $dx=\varphi'(t)\,dt$ теңдігі негізінде

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (2)$$

теңдігін аламыз. Бұл формула *анықталмаған интегралда айнымалыны ауыстыру формуласы* деп аталады. Оң жақтағы интегралды тапқаннан кейін t айнымалысынан қайта x айнымалысына көшеміз.

Интегралды айнымалыны дифференциалтаңбасыныңастына енгізуарқылы тапсақ немесе сол интегралды айнымалыны ауыстыру әдісімен тапсақ та бірдей жауапқа келеміз. Сондықтан тест есептерін оқырман өзіне жеңіл деп таныған 2 әдістің тек біреуімен шығаруына болады.

Мысал 1: $\int\sqrt{\cos x}\sin x dx$ интегралын айнымалыны дифференциалтаңбасыныңастына енгізуарқылы табу керек.

Шешімі:

a) Интегралды айнымалыны дифференциалтаңбасыныңастына енгізуәдісінің

$$\int f(g(x))d(g(x))=F(g(x))+c. \qquad (3)$$

формуласын қолданамыз.

Ереже бойынша $d(\cos u)=-\sin u du$ дифференциалын және $\int u^{\alpha}du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$ интегралын қолданамыз.

b) $\int\sqrt{\cos x}\sin x dx=-\int\sqrt{\cos x}d(\cos x)=-\int(\cos x)^{\frac{1}{2}}d(\cos x)=$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x}+c.$$

c) Жауабы: $-\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x}+c.$

Мысал 2: $\int\sqrt{\cos x}\sin x dx$ интегралынайнымалыны ауыстыру әдісімен табу керек.

Шешімі:

a) Интегралдыайнымалыны ауыстыру әдісімен табудың

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (4)$$

формуласын қолданамыз.

b) $$\int\sqrt{\cos x}\sin x dx=\left|\begin{matrix}\cos x=t\\ -\sin x dx=dt\end{matrix}\right|=-\int\sqrt{t}dt=-\int t^{\frac{1}{2}}dt=-\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=$$

$$=-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+c=-\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x}+c.$$

c) Жауабы: $-\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x}+c.$

Мысал 3: $\int x\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}dx$ интегралын айнымалыны дифференциал таңбасының астына енгізу арқылы табу керек.

Шешімі:

a) Интегралды айнымалыны дифференциал таңбасының астына енгізу әдісінің

$$\int f(g(x))d(g(x))=F(g(x))+c.$$

формуласын қолданамыз.

Ереже бойынша $d(c)=0,$ $d(u^{\alpha})=\alpha u^{\alpha-1}du,$ $\alpha\in R$ дифференциалдарын және $\int u^{\alpha}du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$ интегралын қолданамыз.

b) $$\int x(x^2+1)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2}\int(x^2+1)^{\frac{3}{2}}d\left(x^2+1\right)=\frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+c=\frac{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}{5}+c.$$

c) Жауабы: $\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}{5}+c.$

Мысал 4: $\int x\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}dx$ интегралын айнымалыны ауыстыру әдісімен табу керек.

Шешімі:

a) Интегралдыайнымалыны ауыстыру әдісімен табудың

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

формуласын қолданамыз.

b) $\int x(x^2+1)^{\frac{3}{2}}dx = \left| \begin{array}{l} x^2+1=t, \\ 2xdx=dt \\ xdx=\dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \int t^{\frac{3}{2}} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{\frac{3}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \frac{t^{\frac{5}{2}}}{5} + c = \frac{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}{5} + c.$

c) Жауабы: $\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}{5} + c.$

Мысал 5: $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$ интегралын айнымалыны дифференциал таңбасының астына енгізу арқылы табу керек.

Шешімі:

a) Интегралды айнымалыны дифференциалтаңбасыныңастына енгізуәдісінің
$\int f(g(x))d(g(x)) = F(g(x)) + c.$
формуласын қолданамыз.

b) Ереже бойынша $d\left(u^{\alpha}\right) = \alpha u^{\alpha-1}du, \quad \alpha \in R$ дифференциалын және $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c$ интегралын қолданамыз.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^3\right)}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin x^3 + c\,.$$

c) Жауабы: $\frac{1}{3}\arcsin x^3 + c.$

Мысал 6: $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$ интегралын айнымалыны ауыстыру әдісімен табу керек.

Шешімі:

a) Интегралды айнымалыны ауыстыру әдісімен табудың
$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$
формуласын қолданамыз.

b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}}dx = \left| \begin{array}{l} x^3=t, \\ 3x^2dx=dt \\ x^2dx=\dfrac{dt}{3} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{3\sqrt{1-t^2}} =$

$$= \frac{1}{3}\arcsin t + \mathrm{c} = \frac{1}{3}\arcsin x^3 + \mathrm{c}.$$

c) Жауабы: $\frac{1}{3}\arcsin x^3 + c.$