ТӘЖІРИБЕЛІК САБАҚ №11

ФУНКЦИЯНЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ. КҮРДЕЛІ ФУНКЦИЯНЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ. ФУНКЦИЯНЫҢ ЖОҒАРҒЫ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҢ ЖУЫҚТАП ЕСЕПТЕУДЕ ҚОЛДАНЫЛУЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛДАНАТЫН ФУНКЦИЯ ТУРАЛЫ ТЕОРЕМАЛАР. ФУНКЦИЯНЫ ЗЕРТТЕУ. ТУЫНДЫНЫҢ ЭКОНОМИКАДА ҚОЛДАНЫЛУЫ.

Мысал 1: $y = x^2 + 6x + 3$ функциясының өсу және кему аралықтарын табыңыз.

Шешімі:

a) Функцияның $f'(x) = 0$ және $f'(x)$ болмайтын нүктелері, үзіліс нүктелері болатын нүктелер *кризистік (стационар* немесе *экстремумге күдікті) нүктелер* деп аталады.

Егер $y = f(x)$ функциясы $(a;b)$ интервалында дифференциалданатын және барлық $x \in (a;b)$ үшін $f'(x) > 0$ болса, онда $y = f(x)$ функциясы $(a;b)$ интервалында *өспелі*;

Егер барлық $x \in (a;b)$ үшін $f'(x) < 0$ болса, онда $f(x)$ функциясы $(a;b)$ интервалында *кемімелі*.

b) Функцияның кризистікнүктесін табу үшін бірінші ретті туындысын тауып нөлге теңестіреміз $f'(x) = 0$:

$$\left(x^2 + 6x + 3\right)' = 0$$

$$2x + 6 = 0$$

$$2x = -6$$

$$x = -3.$$

Демек, $x = -3$ функцияның кризистік нүктесі.

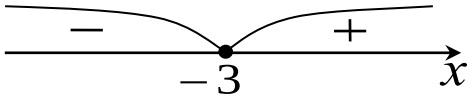
Бірінші ретті туындының таңбасы тұрақты болатын интервалдарды анықтаймыз.

$(-\infty; -3)$ интервалынан кез келген нүкте алынса, мысалы $x = -4$, онда $f'(x)$ туындысының таңбасы «–», яғни $f'(x) < 0$:

$f'(-4) = 2(-4) + 6 = -2$.

$(-3; +\infty)$ интервалынан кез келген нүкте алынса, мысалы $x = 0$, онда $f'(x)$ туындысының таңбасы «+», яғни $f'(x) > 0$:

$f'(0) = 2 \cdot 0 + 6 = 6$.



$f'(x)$- таңбасы

Демек, функция
$(-\infty; -3)$ интервалында $f(x)$ кемімелі,
$(-3; +\infty)$ интервалында $f(x)$ өспелі.

c) Жауабы: $(-\infty; -3)$ интервалы $f(x)$ функциясының кему аралығы, $(-3; +\infty)$ интервалы $f(x)$ функциясының өсу аралығы.

Мысал 2: $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ функциясының экстремум нүктелерін табыңыз.

Шешімі:

a) X жиынында $y = f(x)$ функциясы $x_0 \in X$ нүктесінің аймағында анықталған және бұл нүктеде үзіліссіз болсын. Осы аймақтың барлық x нүктелері үшін

$$f(x) \le f(x_0) \quad \left(f(x) \ge f(x_0)\right)$$

теңсіздігі орындалса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының *максимум (минимум)* нүктесі деп аталады.

Максимум және минимум нүктелері функцияның *экстремум нүктелері* деп аталады.

Егер зерттеліп отырған x_0 нүктесі арқылы өткенде y' таңбасын «+»-тен «–»-ке өзгертсе, онда бұл нүкте максимум нүктесі болады.

Егер зерттеліп отырған x_0 нүктесі арқылы өткенде y' таңбасын «–»-тен «+»-ке өзгертсе, онда бұл нүкте минимум нүктесі болады.

Егер y'-тің таңбасы x_0 нүктесі арқылы өткенде таңбасын өзгертпесе, онда бұл нүктеде функцияның экстремумы жоқ.

b) Функцияның кризистікнүктесін табу үшін бірінші ретті туындысын тауып нөлге теңестіреміз $f'(x) = 0$:

$$\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1\right)'=0$$

$$x^2-4x+3=0$$

Демек, $x_1=1,\ x_2=3$ функцияның кризистік нүктелері.

Бірінші ретті туындының таңбасы тұрақты болатын интервалдарды анықтаймыз.

$(-\infty;1)$ интервалынан кез келген нүкте алынса, мысалы $x=0$, онда $f'(x)$ туындысының таңбасы «+», яғни $f'(x)>0$:

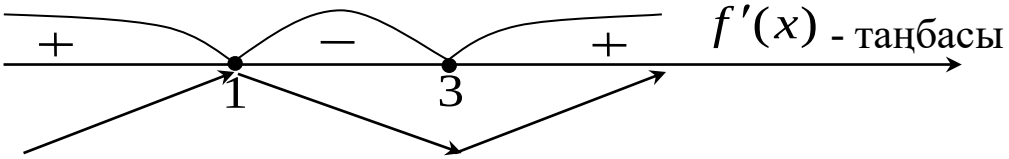
$$f'(0)=0^2-4\cdot 0+3=3.$$

$(1;3)$ интервалынан кез келген нүкте алынса, мысалы $x=2$, онда $f'(x)$ туындысының таңбасы «+», яғни $f'(x)<0$:

$$f'(2)=2^2-4\cdot 2+3=-1.$$

$(1;+\infty)$ интервалынан кез келген нүкте алынса, мысалы $x=5$, онда $f'(x)$ туындысының таңбасы «+», яғни $f'(x)>0$:

$$f'(5)=5^2-4\cdot 5+3=8.$$



$(-\infty;1),(3;+\infty)$ интервалдарында $f(x)$ өспелі, $(1;3)$ интервалында $f(x)$ кемімелі.

$x=1$ функцияның максимум нүктесі, ал $x=3$ функцияның минимум нүктесі.

Экстремум нүктелеріндегі функцияның мәндерін табайық:

$f(1)=\frac{1^3}{3}-2\cdot 1^2+3\cdot 1+1=\frac{7}{3}$, $A\left(1;\frac{7}{3}\right)$ - функция графигінің максимумге сәйкес нүктесі,

$f(3)=\frac{3^3}{3}-2\cdot 3^2+3\cdot 3+1=1$, $B(3;1)$ - функция графигінің минимумге сәйкес нүктесі.

с) Жауабы:

$A\left(1;\frac{7}{3}\right)$ - max нүктесі, $B(3;1)$ - min нүктесі.

Мысал 3: $y=x^3+3x^2-4$ функциясының дөңес және ойыс аралықтарын және иілу нүктелерін табыңыз.

Шешімі:

a) Егер $y=f(x)$ функциясының $(a;b)$ аралығында екінші ретті туындысы $y''<0$ болса, онда осы интервалда функция графигі *дөңес* ал, егер $y''>0$ болса, онда осы интервалда функция графигі *ойыс* болады.

Егер $x_0\in D,\ f''(x_0)=0$ немесе $f''(x_0)$ жоқ болса және x_0 нүктесінен өткенде $f''(x)$ таңбасын өзгертсе, онда x_0 нүктесі функцияның *иілу нүктесі* болады.

b) $y=x^3+3x^2-4$ функциясының екінші ретті туындысын табамыз:

$y'=3x^2+6x$

$y''=6x+6$

Екінші ретті туындысын тауып нөлге теңестіреміз $f''(x)=0$:

$6x+6=0$

$x=-1.$

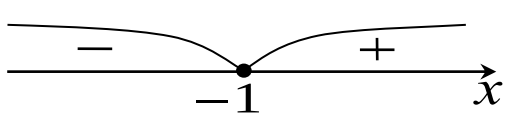
Екінші ретті туындының таңбасы тұрақты болатын интервалдарды анықтаймыз.

$(-\infty;-1)$ интервалынан кез келген нүкте алынса, мысалы $x=-3$, онда $f''(x)$ туындысының таңбасы «–», яғни $f''(x)<0$:

$f''(-3)=6(-3)+6=-6.$

$(-1;+\infty)$ интервалынан кез келген нүкте алынса, мысалы $x=2$, онда $f''(x)$ туындысының таңбасы «+», яғни $f''(x)>0$:

$f''(2)=6\cdot 2+6=18.$



$f''(x)$- таңбалары

$(-\infty;-1)$ интервалында $f''(x)<0 \Rightarrow (-\infty;-1)$ интервалында функция дөңес.

$(-1;+\infty)$ интервалында $f''(x)>0 \Rightarrow (-1;+\infty)$ интервалында функция ойыс.

$x=-1$ нүктесінен өткенде $f''(x)$ таңбасын өзгертендіктен $x=-1$ нүктесі функцияның *иілу нүктесі* болады, ординатасын табу үшін $x=-1$ мәнін функцияға апарып қоямыз:

$y=(-1)^3+3\cdot(-1)^2-4=-1+3-4=-2.$

с) Жауабы:

$(-\infty;-1)$ интервалында функция дөңес.

$(-1;+\infty)$ интервалында функция ойыс.

$A(-1;-2)$ иілу нүктесі.