ТӘЖІРИБЕЛІК САБАҚ №10

ТУЫНДЫ ҰҒЫМЫ, ОНЫҢ МЕХАНИКАЛЫҚ ЖӘНЕ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ МАҒЫНАСЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ЕРЕЖЕЛЕРІ. ЖОҒАРҒЫ РЕТТІ ТУЫНДЫЛАР. ЛОПИТАЛЬ ЕРЕЖЕСІ.

Бұл тараудың есептерін шығару үшін дифференциалдау ережелері мен туындылар кестесін білу қажет.

Дифференциалдау ережелері.

Теорема 1. c тұрақтысы мен $u(x), v(x)$ дифференциалданатын функциялар үшін келесі теңдіктер орындалады:

1) $(c)' = 0;$

2) $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x);$

3) $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x);$

$(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x);$

4) $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0;$

$\left(\frac{u(x)}{c}\right)' = \frac{u'(x)}{c};$

$\left(\frac{c}{u(x)}\right)' = -\frac{c}{u^2(x)} \cdot u'(x).$

Күрделі функцияның туындысы.

Егер $y = f(u)$ және $u = \varphi(x)$ функциялары дифференциалданатын функциялар болса, онда $y = f(u) = f(\varphi(x))$ күрделі функциясы да дифференциалданатын функция болып

$y' = f'(u)u'(x)$ немесе $y'_x = y'_u u'_x$

теңдігі орындалады.

Туындылар кестесі.

x нүктесінде дифференциалданатын $u = u(x)$ функциясы үшін:

1) $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'(x), \quad \alpha \in R$

2) $\left(a^{u}\right)' = a^{u} \cdot \ln a \cdot u'(x)$

3) $\left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'(x)$

4) $\left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'(x)$

5) $\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u'(x)$

6) $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'(x)$

7) $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'(x)$

8) $\left(tgu\right)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'(x)$

9) $\left(ctgu\right)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'(x)$

10) $\left(\arcsin u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'(x)$

11) $\left(\arccos u\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'(x)$

12) $\left(arctgu\right)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'(x)$

13) $\left(arcctgu\right)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'(x)$

14) $\left(shu\right)' = chu \cdot u'(x)$

15) $\left(chu\right)' = shu \cdot u'(x)$

16) $\left(thu\right)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'(x)$

17) $\left(cthu\right)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u'(x)$

Мысал 1: $y = 4x^3 + 3\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}$ функциясының туындысын табыңыз.

Шешімі:

a) $(c\cdot u(x))'=c\cdot u'(x), (u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x)$ дифференциалдау ережелерін және $(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u'$ формуласын қолданамыз.

b) $y'=4\cdot 3x^2+3\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-2(-2)x^{-3}=12x^2+\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}+4x^{-3}=$

$=12x^2+\frac{3}{2\sqrt{x}}+\frac{4}{x^3}.$

c) Жауабы: $12x^2+\frac{3}{2\sqrt{x}}+\frac{4}{x^3}.$

Мысал 2: $y=\sin x\cdot e^x$ функциясының $x=0$ нүктесіндегі туындысын табыңыз.

Шешімі:

a) $(u\cdot v)'=u'v+uv'$ дифференциалдау ережесін және $\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'(x)$, $(\sin u)'=\cos u\cdot u'(x)$ формулаларын қолданамыз.

b) $y'=(\sin x)'\cdot e^x+\sin x\cdot\left(e^x\right)'=\cos x\cdot e^x+\sin x\cdot e^x\big|_{x=0}=1.$

c) Жауабы: $1.$

Мысал 3: $y=\frac{x^2}{\cos x}$ функциясының туындысын табыңыз.

Шешімі:

a) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ дифференциалдау ережесін және $\left(u^\alpha\right)'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'(x)$, $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'(x)$ формулаларын қолданамыз.

b) $y'=\frac{\left(x^2\right)'\cos x-x^2(\cos x)'}{(\cos x)^2}=\frac{2x\cos x+x^2\sin x}{\cos^2 x}.$

c) Жауабы: $\frac{2x\cos x+x^2\sin x}{\cos^2 x}.$

Мысал 4: $y=\sin\left(x^2+3\right)$ функциясының туындысын табыңыз.

Шешімі:

a) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ формуласын және $\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x)$, $(c)' = 0$ дифференциалдау ережесін қолданамыз.

b) $y = \sin u$, мұнда $u = x^2 + 3$.

c) Жауабы: $2x\cos\left(x^2+3\right)$.

Мысал 5: $y = \left(x^2 + e^x\right)^{10}$ функциясының $x = 0$ нүктесіндегі туындысын табыңыз.

Шешімі:

a) $\left(u^\alpha\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'(x)$, $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'(x)$ формулаларын және $\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x)$ дифференциалдау ережесін қолданамыз.

b) $y = u^{10}$, мұндағы $u = x^2 + e^x$.

$$y' = 10u^9 \cdot \left(x^2 + e^x\right)' = 10\left(x^2 + e^x\right)^9 \cdot \left(2x + e^x\right)\Big|_{x=0} = 10.$$

c) Жауабы: 10.

Мысал 6: $y = x^2 \cdot e^{\sin x}$ функциясының туындысын табыңыз.

Шешімі:

a) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ дифференциалдау ережесін және $\left(u^\alpha\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'(x)$, $(e^u)' = e^u \cdot u'$ формулаларын қолданамыз.

b) $y' = \left(x^2\right)' e^{\sin x} + x^2\left(e^{\sin x}\right)' = 2xe^{\sin x} + x^2 e^{\sin x}(\sin x)' =$
$= 2xe^{\sin x} + x^2 e^{\sin x}\cos x.$

Жауабы: $2xe^{\sin x} + x^2 e^{\sin x}\cos x.$

Мысал 7: $M(1; 2)$ нүктесіндегі айқындалмаған $y^2 + 2x^2 y = 0$ функцияның y'_x туындысын табыңыз.

Шешімі:

a) x айнымалысынан тәуелді y функциясы $F(x, y) = 0$ айқындалмаған түрінде берілген. Оның туындысын табу үшін $F(x, y) = 0$ теңдеуінің екі жағын да y-тің x-тен тәуелді екенін ескере отырып дифференциалдаймыз да, нәтижесінде $y' = \varphi(x, y)$ түрінде өрнектеп аламыз.

b) $2yy'+4xy+2x^2y'=0$ теңдеуінің екі жағын да y-тің x-тен тәуелді екенін ескере отырып дифференциалдаймыз:
$(2y+2x^2)y'=-4xy$.

Алынған теңдеуден y' туындысын $y'=\dfrac{-4xy}{2y+2x^2}$ түрінде өрнектеп, осы өрнектің $M(1;2)$ нүктесіндегі мәнін табамыз:

$$y'=\left.\frac{-4xy}{2y+2x^2}\right|_{(1;2)}=\frac{-4\cdot1\cdot2}{2\cdot2+2\cdot1^2}=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}.$$

c) Жауабы: $-\dfrac{4}{3}$.

Мысал 8: $\begin{cases}x=2t+3\\ y=\sin t\end{cases}$ функциясы берілген. $t=0$ болғанда y'_x туындысын есептеңіз.

Шешімі:

a) x айнымалысынан тәуелді y функциясы

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases},\qquad t_0\le t\le t_1$$

параметрлік түрінде берілсін.

Егер $\varphi(t),\psi(t)$ функциялары дифференциалданатын функциялар және $\varphi'(t)\neq0$ болса, онда параметрлік түрде берілген функцияның туындысы

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

формуласымен есептеледі.

b) $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$ формуласы бойынша туындысын тауып, $t=0$ нүктесіндегі мәнін табамыз:

$$y'=\frac{(\sin t)'}{(2t+3)'}=\left.\frac{\cos t}{2}\right|_{t=0}=\frac{1}{2}.$$

c) Жауабы: $\dfrac{1}{2}$.